

MODELOS DE OPTIMIZACIÓN AVANZADA



Mg. Jessica Marilu Loera Paredes
Dr. Héctor William Carlos Cruces
Mg. Jorge Luis Donayre Ríos
Dr. Enrique Mendoza Caballero

EDITORIAL

CICI

CENTRO DE INVESTIGACIONES
Y CAPACITACIONES
INTERDISCIPLINARES

ISBN 978-628-96838-2-0

Autores

Dr. Héctor William Carlos Cruces <i>Universidad Nacional San Luis Gonzaga de Ica</i> hector.carlos@unica.edu.pe https://orcid.org/0000-0001-6590-5562	Mg. Jorge Luis Donayre Ríos <i>Universidad Nacional San Luis Gonzaga de Ica</i> jorge.donayre@unica.edu.pe https://orcid.org/0000-0003-2176-7406
Mg. Jessica Marilu Loera Paredes <i>Empresa Privada Mecafer EIRL</i> diocdental@hotmail.com https://orcid.org/0000-0003-1757-6746	Dr. Enrique Mendoza Caballero <i>Universidad Nacional San Luis Gonzaga de Ica</i> enrique.mendoza@unica.edu.pe https://orcid.org/0000-0003-0606-821X

CICI | **CENTRO DE INVESTIGACIONES Y CAPACITACIONES INTERDISCIPLINARES**

Alain Fitzgerald Castro Alfaro: Editor

MODELOS DE OPTIMIZACIÓN AVANZADA

Autores: Héctor William Carlos Cruces, Jorge Luis Donayre Ríos, Jessica Marilu Loera Paredes, Enrique Mendoza Caballero

Versión Digital: ISBN 978-628-96838-2-0

Editorial Centro de Investigaciones y Capacitaciones Interdisciplinarias SAS – CICI

Coordinadora: Nora González Pérez – Cartagena –Colombia

Portada y diagramación: Alain Castro González

Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales

Cartagena –Colombia, Marzo de 2025

MODELOS DE OPTIMIZACIÓN AVANZADA

Héctor William Carlos Cruces

Jorge Luis Donayre Ríos

Jessica Marilu Loera Paredes

Enrique Mendoza Caballero

Colombia

Latinoamérica

ÍNDICE

Carátula	
Índice	i
Introducción.....	iii
Capítulo I: Introducción y conceptos elementales para el planteamiento de modelos aplicados a la economía	5
1.1. ¿Qué es un modelo?	6
1.2. Importancia de los modelos para la toma de decisiones.....	7
1.3. Modelación de la investigación de operaciones.....	8
1.4. Aplicación de los modelos de investigación de operaciones.....	9
1.5. Directrices de un proyecto de investigación de operación.....	9
1.6. Fases de un estudio de investigación de operaciones.....	10
Capítulo II: Investigación de operaciones determinísticas	16
2.1. Definición de modelo determinístico.....	17
2.2. Modelo Lineal.....	17
2.3. Planteamiento del problema	18
2.4. Pasos para formular el modelo	20
2.5. Formulación del modelo.....	21
2.6. Conceptualización y equivalencias	23
2.7. Importancia de la formulación	26
2.8. Características del modelo lineal	26
Capítulo III: Formulación de casos	28
3.1. Caso 1	29
3.2. Caso 2	30
3.3. Caso 3	33
Capítulo IV: Métodos de solución óptima	35
Capítulo V: Problemas específicos.....	37
5.1. Método Simplex	38
5.2. Complicaciones del Método Simplex.....	40
5.3. Solución del Método Simplex	45

Capítulo VI: Modelos de transportes.....	53
6.1. Modelo determinístico del transporte	54
6.2. Método de la esquina noroeste	62
Capítulo VII: Prueba de optimalidad	69
7.1. Método de solución óptima	70
Capítulo VIII: Modelos de transportes – Método de los costos mínimos	73
8.1. Costo mínimo	74
Capítulo IX: Modelos de transportes – Método de las ganancias máximas.....	79
9.1. Caso práctico	80
Capítulo X: Modelos de transportes – Método aproximado de Vogel	85
10.1. Método aproximado de Vogel	86
Capítulo XI: Modelo de asignación	89
Capítulo XII: Modelo de asignación – problema.....	92
12.1. Caso práctico	93
Referencias bibliográficas	96

INTRODUCCIÓN

En un contexto de mercados globalizados, las empresas deben planificar estratégicamente el uso de sus recursos para alcanzar un rendimiento de alto nivel y mantenerse competitivas. Efectivamente, la investigación de operaciones se centra en el desarrollo y la aplicación de modelos matemáticos que permiten optimizar la asignación y el uso de recursos. La optimización se extiende no solo a los recursos para las operaciones diarias, sino también a aquellos destinados a reinversiones estratégicas en el mercado de capitales, la formación de portafolios de inversión y la planificación operativa.

Hoy en día existen numerosas herramientas disponibles para aumentar la eficacia de los procesos administrativos y productivos de las organizaciones y empresas en general, aumentando así la probabilidad de alcanzar un desempeño óptimo.

Las entidades utilizan sistemas técnicos avanzados, como modelos de producción, planificación, procesos cuantitativos, estrategias financieras e inteligencia artificial, para optimizar sus recursos y mejorar la eficiencia de su gestión operativa. Mediante estos enfoques, logran administrar de manera eficiente sus recursos físicos, económicos, humanos y financieros, asegurando una gestión estratégica e integral.

Para nuestro estudio, se destacan las diversas técnicas de la investigación operacional, las cuales proporcionan una variedad de métodos, tanto determinísticos como estocásticos, con el propósito de resolver eficazmente los distintos problemas que puedan surgir.

Es importante tener en cuenta que los modelos no toman decisiones de manera autónoma; dichas decisiones son responsabilidad de la dirección, los asesores, los equipos de trabajo, los jefes de área y el personal auxiliar. A partir de un enfoque estratégico, estos actores analizan y aplican los resultados obtenidos con el objetivo de optimizar el rendimiento, garantizando un mejor proceso en la gestión organizacional.

En la investigación de operaciones, los métodos proporcionan una "solución óptima" como el resultado final derivado del algoritmo matemático establecido. No obstante, existen otros factores

cuya influencia en el éxito o fracaso solo puede ser evaluada por los directivos, quienes además deben realizar los ajustes pertinentes para garantizar un funcionamiento verdaderamente eficiente.

A partir de lo planteado, se plantea una cuestión clave: ¿cuál es el valor del modelo si no asegura la solución óptima que propone? Aunque el modelo puede ofrecer una solución óptima al problema, la realidad no siempre es completamente predecible., lo que implica que diversos factores no contemplados en el modelo pueden influir en los resultados. Esto puede llevar a que la solución obtenida no sea definitiva; sin embargo, disponer de una visión estructurada sobre cómo abordar el problema resulta crucial, permitiéndoles tomar decisiones estratégicas fundamentadas y minimizar los riesgos en la inversión.

Capítulo I

CONCEPTOS ELEMENTALES PARA EL PLANTEAMIENTO DE MODELOS
APLICADOS A LA ECONOMÍA

CAPITULO I: CONCEPTOS ELEMENTALES PARA EL PLANTEAMIENTO DE MODELOS APLICADOS A LA ECONOMÍA

1.1. ¿Qué es un modelo?

Los modelos económicos representan instrumentos que facilitan la comprensión de la relación entre diferentes variables que ilustran el funcionamiento de la economía, o de una de sus partes. Resultan esenciales para el estudio de fenómenos inherentemente complejos, centrando la atención únicamente en las variables más significativas y simplificando notablemente el proceso de análisis (Team System, 2025).

Los modelos son abstracciones de problemas reales que integran criterios matemáticos para lograr resultados óptimos. En la investigación de operaciones, estos modelos de optimización actúan como herramientas estratégicas, ofreciendo directrices esenciales para la toma de decisiones y la resolución de problemas administrativos, lo que contribuye a la generación de valor en la organización.

Por esta razón, comprender este enfoque de aprendizaje basado en la formulación de un modelo facilita a los gerentes y ejecutivos la identificación y análisis de los elementos clave de cualquier situación, permitiéndoles tomar decisiones estratégicas fundamentadas.

Es fundamental reconocer que ningún modelo puede representar la realidad en su totalidad, ya que constituye una abstracción de un problema concreto. Esto implica que solo es posible incluir un conjunto limitado de variables representativas, cuya interacción es modelada de manera aproximada a través de un proceso iterativo. De este modo, el modelo busca reflejar, de forma simplificada, las relaciones existentes entre dichas variables, proporcionando una visión estructurada del problema analizado.

Lo expuesto previamente facilita la comprensión, de manera clara y estructurada, acerca de la pertinencia de desarrollar un modelo, así como la identificación de las variables más relevantes que deben ser consideradas en su formulación.

1.2. Importancia de los modelos para la toma de decisiones

Los modelos de investigación operacional son clave para la toma de decisiones en las empresas, ya que ayudan a resolver problemas internos. Sin embargo, los resultados óptimos de estos modelos pueden variar en la práctica debido a factores externos que no se consideran en su estructura.

En determinados escenarios, es posible referirse a "soluciones óptimas" en la gestión empresarial, así como en la toma de decisiones gubernamentales dentro de contextos reales. Del mismo modo, este concepto resulta aplicable en el ámbito de los negocios, donde la optimización de estrategias desempeña un papel crucial en la eficiencia y efectividad de las acciones adoptadas.

Se aconseja a los directivos empresariales que, previo a la implementación de los resultados obtenidos, lleven a cabo un análisis minucioso de sus decisiones en relación con estos, evitando confiar de manera absoluta en el modelo, ya que este representa solo una aproximación a la realidad.

Del mismo modo, si la aplicación de los resultados obtenidos no se alinea con los objetivos estratégicos de la dirección, resulta fundamental revisar el modelo y efectuar los ajustes necesarios para garantizar su adecuación y efectividad en la toma de decisiones.

Los modelos económicos constituyen un recurso valioso para entender, de forma clara, cómo opera una economía o un mercado, dado que en muchas ocasiones facilitan la simplificación precisa de las variables clave que influyen en los procesos y fenómenos que pueden surgir en la evolución de las economías.

La constante necesidad y el deseo de los seres humanos por explorar lo desconocido y obtener explicaciones coherentes sobre la realidad en la que se encuentran los ha llevado a buscar herramientas que satisfagan esos intensos anhelos. Esa conexión entre el investigador y el objeto de estudio constituye el camino metodológico. Sin una metodología adecuada, es prácticamente inviable alcanzar la lógica que lleve al conocimiento científico (Posso, 2014).

Dentro del contexto de los modelos de optimización, resulta imprescindible considerar las siguientes consideraciones:

- I. Constituye una abstracción de la realidad aplicada a la representación de un problema.
- II. En su formulación, es fundamental considerar argumentos suficientes que permitan:
 - a. Obtener resultados que respondan eficazmente al problema planteado.
 - b. Asegurar que dichos resultados sean consistentes con la información disponible.
 - c. Optimizar y analizar los resultados de forma rápida.

Se utilizan algunos modelos como indicadores para evaluar el desempeño mediante el análisis de determinadas variables dentro de un conjunto de actividades, lo que facilita la evaluación del grado de cumplimiento de los objetivos establecidos.

Posiblemente, el desafío más significativo en la investigación de operaciones radica en la construcción del modelo, ya que este refleja la contribución de la elección de las variables pertinentes es esencial para analizar y solucionar la problemática identificada.

El análisis de operaciones contribuye a la resolución de situaciones críticas que generan cuellos de botella en diversas áreas operativas o en la gestión administrativa de las organizaciones, permitiendo así una optimización eficaz en el aprovechamiento de los recursos disponibles.

1.3. Modelación de la investigación de operaciones

La investigación de operaciones, al ser una disciplina científica, se apoya en una amplia variedad de modelos que la transforman en una herramienta fundamental para examinar y mejorar el uso de los recursos, tanto en el ámbito empresarial como en otras organizaciones.

De este modo, el autor Juan Prawda aporta significativamente al reconocimiento de la relevancia operativa:

La derivación de una solución a un problema específico mediante un modelo implica el cálculo del valor óptimo de las variables controlables del sistema. Estos modelos matemáticos de decisión permiten determinar valores exactos o aproximados de dichos componentes con el propósito de optimizar su desempeño conforme a criterios predefinidos. Dichos cálculos se llevan a cabo bajo la premisa de que se dispone de información sobre el estado de aquellos elementos del sistema que no pueden ser controlados. (Prawda, 1979, p. 22).

Se emplea dos enfoques en la investigación de operaciones fundamentales para la optimización: los modelos determinísticos y los modelos estocásticos. Los primeros se caracterizan por disponer de un modelo matemático previamente estructurado, en el cual se definen una función y restricciones específicas que deben ser optimizadas. En contraste, los modelos estocásticos carecen de una formulación predefinida, lo que implica la necesidad de construirlos a partir de la información limitada disponible.

1.4. Aplicación de los modelos de investigación de operaciones

En la actualidad, este modelo tiene una aplicabilidad transversal a diversos sectores, abarcando ámbitos comerciales, bursátiles, industriales, financieros y de servicios, así como la organización de los recursos en el sector salud y cualquier otro tipo de inversión que requiera optimización de recursos. Su implementación es viable tanto en el sector privado y público.

Actualmente, diversas instituciones se especializan en consolidar y desarrollar los distintos modelos que integran la investigación de operaciones, abarcando tanto sus fundamentos teóricos como su aplicación práctica.

A nivel global, diversas asociaciones reúnen a profesionales dedicados a la aplicación de la investigación de operaciones. En los Estados Unidos, destacan dos organizaciones: la Operations Research Society of Management Science, que cuenta con aproximadamente 12,000 miembros, y el Institute of Management Science, con alrededor de 8,000 afiliados. Asimismo, existen asociaciones en otras regiones, como Canadá, Europa, América Latina y Asia (Prawda, 1979, p. 24).

1.5. Directrices de un proyecto de investigación de operación

Para realizar el análisis de esta directriz, resulta esencial considerar las directrices que se exponen a continuación:

- a. Optimizar la toma de decisiones:** Tanto las empresas como las organizaciones, en su gestión, suelen tomar decisiones de manera técnica sin considerar plenamente las interconexiones entre sus distintas áreas. El uso de modelos operacionales posibilita un

análisis integral de estas interdependencias entre variables, previniendo así errores y interrupciones en la resolución de problemas.

- b. Establecer conexiones estratégicas entre las distintas áreas organizacionales:** A través de sus diversos modelos, la investigación de operaciones permite estructurar y organizar eficientemente los diferentes sectores dentro de una empresa u organización. Un ejemplo de ello se observa en la gestión de los requerimientos de materia prima dentro de un proceso productivo, donde resulta fundamental mantener inventarios adecuados y garantizar una circulación óptima de los insumos a lo largo de toda la cadena operativa.
- c. Implementar un control efectivo sobre los procesos:** Una de las contribuciones más significativas de los modelos de análisis de operaciones radica en la posibilidad de desarrollar un monitoreo riguroso de las tareas dentro de una empresa u organización, lo que permite anticipar y prevenir posibles dificultades en el futuro.
- d. Lograr procedimientos eficientes:** Mediante la aplicación de estas metodologías, es posible optimizar tanto los costos como los ingresos, ya sea incrementando o reduciendo una función objetivo. Asimismo, se favorece una gestión más fluida de los recursos, mitigando posibles obstáculos y promoviendo una interconexión más efectiva entre los distintos elementos que conforman la empresa u organización.

En el campo de la investigación de operaciones, no existe un método general que sirva para resolver todos los modelos que pueden presentarse en la práctica. En cambio, la tipología y la complejidad del modelo matemático influyen en el tipo de método de resolución. (Taha, 2012)

1.6. Fases de un estudio de investigación de operaciones

Prawda (1979), establece que un estudio de investigación puede estructurarse en las siguientes fases:

- a. Estudio Análisis de la organización o empresa:** Para desarrollar una investigación, es fundamental, en primera instancia, comprender el funcionamiento interno en una compañía, también en su interacción con el exterior. Con este conocimiento, es posible realizar una evaluación precisa del tipo de entidad a examinar y de los desafíos que enfrenta. Esto facilita la identificación de variables que guardan una relación más estrecha con la

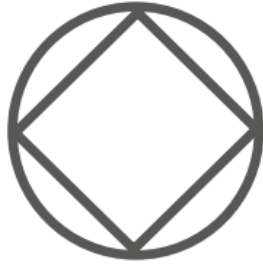
problemática abordada, permitiendo así la implementación de modelos adecuados y la obtención de soluciones óptimas.

- b. **Concepción de la empresa como un sistema interdependiente:** Esto implica que la organización debe ser entendida como un sistema estructurado en el que cualquier cambio en una de sus partes puede influir en el funcionamiento de las demás. Desde la perspectiva de la investigación de operaciones, este enfoque conlleva una ampliación del problema inicialmente planteado, permitiendo la incorporación de interacciones que no han sido consideradas en el modelo formulado por la administración.
- c. **Planteamiento del problema en la organización:** Antes de formular el problema que se pretende abordar en un estudio operacional, es fundamental analizar diversas alternativas de solución. En este contexto, Ackoff establece una serie de consideraciones esenciales que deben tomarse en cuenta para estructurar un problema de manera clara y precisa:
 - i. Es imprescindible que el problema pueda ser atribuido a, al menos, un individuo que forme parte de un entorno determinado.
 - ii. Se debe contar con opciones C1 y C2, entre las cuales pueda elegir, lo que implica la existencia de una capacidad de toma de decisiones.
 - iii. Como consecuencia de su elección, deben derivarse al menos dos resultados posibles, de los cuales uno debe ser preferido sobre el otro, es decir, debe haber al menos un desenlace deseado que constituya su objetivo.
 - iv. Las alternativas de acción disponibles deben proporcionar una cierta probabilidad de alcanzar dicho objetivo, pero no garantizar la consecución simultánea de ambos resultados.
 - v. Los encargados de la toma de decisiones no cuentan con conocimiento absoluto sobre las soluciones, así como sobre su eficacia y/o efectividad en la resolución del problema.

Para establecer la existencia o inexistencia de un problema, es fundamental considerar los siguientes aspectos:

- Las decisiones adoptadas deben impactar tanto a quienes están directamente involucrados en la problemática como a quienes no lo están, como ocurre en el caso de los productores y los no productores.

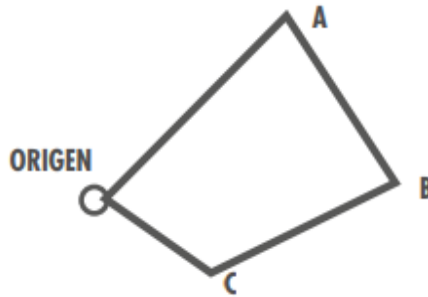
- La estrategia seleccionada debe ser susceptible de ser implementada por otros actores.
 - Es imprescindible vincular la totalidad de la problemática con múltiples objetivos, aun cuando algunos de ellos no se consideren prioritarios.
 - Debe existir una cantidad finita de estrategias viables entre las cuales se pueda elegir.
 - La ubicación o contexto en el que se presenta la problemática debe estar en constante transformación.
 - La problemática debe afectar a múltiples individuos y no solo a uno de manera aislada.
- d. **Existen dos tipos de problemas:** los determinísticos y los estocásticos. Los problemas estocásticos se identifican en función de los niveles de incertidumbre y riesgo presentes.
- i. **Problema de Incertidumbre:** Debido a los altos niveles de incertidumbre en estos temas, la información estadística es necesaria. Es fundamental estimar las probabilidades que se incluirán en el modelo para poder aproximarnos a ellas.
 - ii. **Problema determinístico:** En los problemas determinísticos, cada alternativa propuesta tiene una solución única. Cuando existen múltiples alternativas, también habrá diversas soluciones. Se evaluará la efectividad de solución.
 - iii. **Problema de Estocástico:** Este tipo de problema se caracteriza por un nivel de incertidumbre, donde las variables involucradas son dudosas. Es indispensable mantener una probabilidad asociada. La función de distribución de estas probabilidades puede ser identificada y, por lo tanto, calculada.
- e. **Construcción del modelo:** las técnicas aplicadas permiten distinguir tres tipos de modelos:
- i. **Modelos icónicos:** Los modelos icónicos se representan visualmente mediante imágenes, cuya medición se puede realizar a escala según el tipo de situación que se desea analizar.

Figura 1:*Modelo imagen icono*

- ii. **Modelos analógicos:** Estos modelos se construyen a partir de esquemas que replican las propiedades de un modelo derivado del problema a resolver, tomando como referencias características de otros modelos que serían iguales. Un ejemplo de esto es el modelo de red de conexión aérea entre diferentes países, cuyas características son similares a las de un sistema de interconexión satelital.

Figura 2:*Modelo análogo*

- iii. **Modelos simbólicos:** Este tipo de modelo es ampliamente utilizado debido a su bajo costo y facilidad de construcción. Se caracteriza por una representación abstracta de la situación que se desea analizar, utilizando símbolos como letras, números, variables y ecuaciones.

Figura 3:*Modelo simbólico*

Debido a la carencia de información al intentar resolver un problema, en muchas ocasiones resulta necesario transitar de un tipo de modelo a otro con el fin de obtener los datos requeridos.

Esta estrategia contribuye a minimizar la posibilidad de cometer errores. Es importante destacar que, a medida que el modelo se simplifica, la complejidad en la obtención de la información disminuye.

- f. **Derivación de soluciones del modelo:** implica identificar los valores de las variables que conducen a la solución óptima. Sin embargo, como se ha señalado, esto no garantiza necesariamente una mejora en la eficiencia o efectividad del sistema. El análisis matemático aplicado a un modelo de solución en investigación de operaciones sigue un enfoque deductivo, es decir, parte de lo general para llegar a lo específico. Además, otro enfoque para alcanzar soluciones posibles es el método iterativo, en el cual se generan soluciones viables hasta encontrar la óptima, recorriendo el denominado polígono de soluciones hasta llegar a la solución ideal.
- g. **Prueba del modelo y soluciones:** debe llevarse a cabo independientemente de quien los desarrolle, con el objetivo de verificar si los resultados obtenidos corresponden a predicciones precisas o cuán cercanos están de ser considerados confiables, se deben seguir los siguientes pasos:
 - i. Es necesario verificar que el diseño desarrollado no presente errores, de modo que, durante las iteraciones sucesivas, no se vuelva inviable.

- ii. Después de confirmar la validez del modelo, se procede a revisar las expresiones matemáticas, asegurándose de que estén alineadas con los objetivos que se desean alcanzar.
 - iii. Después de verificar tanto el modelo como su rendimiento; Los resultados deben analizarse y explicarse de acuerdo con el problema que se planteó.
 - iv. Se debe realizar el análisis de resultados de forma que los interesados puedan comprenderlos fácilmente.
 - v. Una vez efectuado el análisis, se deben realizar los ajustes pertinentes al modelo y, posteriormente, llevar a cabo la implementación del mismo en el contexto existente.
- h. Diseño de controles asociados a la solución:** es necesario verificar que no se haya pasado por alto ningún componente controlable de importancia y que ninguna interacción relevante para la solución haya sido descartada.
- i.** Es fundamental corroborar las opiniones de todo el equipo encargado de la toma de decisiones, asegurándose de que sus conclusiones se encuentren debidamente reflejadas en los resultados.
- j. Implementación de la solución al sistema:** Cuando la solución se obtiene a través del formulario de investigación, incluidos los espectáculos deportivos, las restricciones y las funciones específicas, es necesario verificar que la tecnología utilizada para resolverla se haya aplicado adecuadamente al sistema de análisis.

Capítulo II

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES DETERMINÍSTICAS

CAPITULO II: INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES DETERMINÍSTICAS

2.1. Definición de modelo determinístico

Al analizar un sistema compuesto por “m” ecuaciones lineales con “n” variables, se propone encontrar sus variables con cada valor, que satisfagan las restricciones establecidas, asegurando que estos sean no negativos, y al mismo tiempo maximizan o minimizan una función lineal, conocida como la función objetivo, que está conformada por estas variables. El enfoque determinístico permite analizar y evaluar diversas soluciones factibles para un problema planteado, facilitando la identificación de la mejor alternativa entre múltiples opciones. Estos modelos son fundamentales para tomar la decisión en sectores como el organizacional, político, económico, empresarial y financiero, ya que ofrecen estrategias aplicables que buscan optimizar el uso eficiente de los recursos en cada compañía.

Los modelos determinísticos son aquellos en los que se asume que los datos son conocidos de forma precisa, lo que implica que, al momento de analizar el modelo, se cuenta con toda la información esencial para llevar a cabo la toma de decisiones (Moreno, 2021).

2.2. Modelo Lineal

Es una función lineal condicionada por restricciones también lineales, formulada a través de un algoritmo matemático que brinda múltiples soluciones factibles, facilitando la obtención de la mejor alternativa. En el campo de la investigación de operaciones determinística, se emplean diversos métodos lineales, cuya estructura matemática altamente eficiente permite encontrar la solución óptima según la naturaleza del problema a resolver.

Dentro de estos enfoques, se pueden mencionar el método gráfico, simplex, gran M, dual simplex, análisis postóptimo, dual, así como los métodos de transporte y asignaciones, todos ellos pertenecientes al ámbito de la programación lineal.

Al abordar la pregunta sobre qué significa la programación lineal dentro del ámbito de la investigación operativa, se puede mencionar que se trata de un enfoque matemático de optimización que facilita la formulación de modelos lineales con el objetivo de minimizar costos o aumentar beneficios en diversas secciones de una entidad o compañía (Euroinnova, 2021).

La Programación Lineal (PL), constituye una de las áreas más importantes dentro de la Investigación Operativa. En esta sección se incluyen todos los modelos de optimización en los que las funciones involucradas, tales como la función objetiva y las restricciones, son lineales en relación a las variables de decisión (Muñoz, 2012).

Por ejemplo, se puede emplear para mejorar la distribución de recursos en una organización, para organizar la fabricación de productos y servicios, para aumentar la eficacia en la designación de trayectorias de transporte o para perfeccionar la entrega de productos en un mercado (Questionpro, 2022) .

2.3. Planteamiento del problema

Las operaciones relacionadas con la producción, gestión administrativa y finanzas frecuentemente manifiestan una diversidad de problemáticas que demandan la aplicación de técnicas de optimización especializadas. Los modelos lineales, en virtud de su versatilidad y la robustez de sus metodologías, se erigen como una herramienta de análisis esencial para la solución de dichas problemáticas.

En específico, los modelos lineales, mediante sus distintas metodologías, permiten abordar un amplio espectro de problemas de optimización. Sin embargo, la efectividad de estos modelos radica en la correcta estructuración del problema, la cual debe ajustarse a los siguientes parámetros:

- i. La variable de decisión debe ser determinadas para resolver el problema.
- ii. Establecer la función objetivo (F.O), cuyo propósito será optimizarse, ya sea mediante su maximización o minimización.
- iii. Garantizar el cumplimiento de la característica de actividad, lo que implica que la función objetivo debe reflejar la agregación de las aportaciones de cada variable, asegurando que el resultado total sea coherente.
- iv. Cumplir con la condición de no ser negativo, la cual indica que todas las variables empleadas en el problema deben ser iguales o superiores a cero ($x_j \geq 0$), dado que en este contexto no se pueden obtener valores negativos.
- v. Establecer las restricciones para delinear la disponibilidad de los recursos limitados que se emplearán en la formulación del problema.

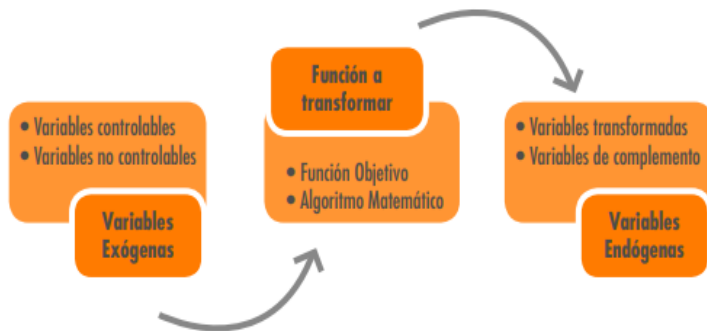
- vi. Asegurar el cumplimiento de la propiedad de proporcionalidad, lo que implica que tanto la función objetivo como las restricciones deben mantener una relación proporcional en cuanto a la contribución de cada variable, en función de la disponibilidad de recursos.
- vii. Asegurar el cumplimiento de la propiedad de divisibilidad, lo que implica que las variables pueden asumir valores fraccionarios. Esta característica es fundamental, especialmente en Sistemas de fabricación o distribución de productos discretos, donde no siempre se puede asegurar que los valores asignados sean enteros.

La estructuración inicial de un problema, con miras a su modelización, demanda un análisis conceptual exhaustivo de las variables pertinentes. Este análisis implica la formulación de supuestos y la implementación de simplificaciones estratégicas, con el objetivo de construir un modelo que represente una abstracción idealizada del sistema en estudio.

De manera concomitante, la fase de formulación del problema exige que el modelador realice una selección rigurosa y una delimitación precisa de los elementos del entorno que poseen relevancia para la fundamentación del modelo, excluyendo aquellos aspectos que resulten superfluos o irrelevantes.

La delimitación precisa del ámbito en entidades empresariales, organizaciones y modelos de negocio, exige la focalización exclusiva en los parámetros decisionales y objetivos intrínsecos a la formulación del problema.

En el proceso de diseño de un modelo de optimización, la identificación y definición de las variables emergen como el desafío primordial. Para tal fin, se propone un diagrama estructural que articula las variables relevantes, tanto internas como externas al sistema analizado. Estas variables se categorizan en dos tipologías: endógenas, aquellas intrínsecas al sistema, y exógenas, aquellas provenientes del entorno circundante.

Figura 4*Diagrama de variables exógenas y endógenas*

Las variables de entrada se dividen en exógenas y endógenas. Las exógenas pueden ser controlables, gestionadas por directivos, o no controlables, influenciadas por factores externos. Las endógenas, también llamadas variables transformadas o de complemento, permiten evaluar el cumplimiento de los objetivos y considerar alternativas en la solución del modelo.

Las variables transformadas son de gran importancia, ya que representan aquellas consideraciones utilizadas para indicar el grado de logro en relación con lo planeado. Por este motivo, las variables transformadas son denominadas variables optimizadas.

En este proceso, el modelo matemático diseñado permite transformar las variables de acuerdo con las condiciones establecidas en el real problema.

2.4. Pasos para formular el modelo

La elaboración del modelo requiere una estructura matemática formada por una serie de parámetros, los cuales deben ser establecidos de la siguiente forma.

- i. **Definir las variables de decisión (x_i):** Estas corresponden a las soluciones encontradas para el problema y se pueden representar como $x_1, x_2, \dots, x_n$. La cantidad de variables a incluir dependerá de las características específicas del problema a abordar.
- ii. **Definir la función objetivo (F, O):** Se trata de la función creada para optimizar las variables del problema, asegurando que estén vinculadas entre sí para obtener un **resultado

global**. Esto significa que, por ejemplo, la reducción en la producción de un producto (variable) podría permitir el incremento en la fabricación de otro).

- iii. **Definir las restricciones:** (C, S, R) Esto se refiere a las limitaciones en la disponibilidad y uso de los recursos, lo que implica restricciones lineales relacionadas con la capacidad de cubrir la demanda, dadas las limitaciones de los recursos.
- iv. **Definir la condición de no negatividad:** Esto significa que las variables deben tener valores iguales o superiores a cero, garantizando que no se obtengan resultados negativos en la solución.
- v. **Definir el modelo matemático:** Una vez establecidos los pasos previos, se elabora el modelo matemático que servirá como representación de la solución al problema.

2.5. Formulación del modelo

Tras haber completado los pasos previos, se procede a formular el modelo conforme al algoritmo matemático necesario, de acuerdo con las especificaciones del problema, de la siguiente manera:

- i. **Variable de decisión:** pueden clasificarse en dos tipos: aquellas con referencia y las que no la tienen. En el caso de las variables con referencia, como ejemplo, una empresa que cuenta con varios puntos de distribución.
- ii. **Variable de decisión sin referencia:** se refieren a situaciones como una compañía que fabrica una variedad de productos.

$$X_j \text{ para toda } j=1, \dots, n$$

En este contexto, la variable "x" representa el elemento a optimizar, de acuerdo con el tipo de problema planteado, mientras que el subíndice "j" señala la cantidad de variedades de productos que deben ser tomadas en cuenta para resolver dicho problema.

- iii. **Variable decisión con referencia:** Hace referencia a una variable con un punto de origen y varios destinos a los que debe dirigirse. Su representación se expresa de la siguiente manera:

$$X_{ij} \text{ para todo } i=1, \dots, m ; j=1, \dots, n$$

En esta ecuación, la variable "x" es el factor a optimizar según el tipo de problema, y se distingue por dos subíndices. El subíndice "i" hace referencia a los puntos relacionados con las variables, mientras que el subíndice "j" señala el número de tipos de esas variables.

- iv. **La función objetivo (F, O):** Se refiere a la función que se pretende optimizar; esta puede adoptar dos enfoques distintos para su optimización: uno orientado a la maximización y otro a la minimización. Su expresión matemática se presenta así:

Sin referencia:

$$\text{Max o Min } (Z) = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 + \dots + C_n X_n$$

Se presenta de manera general:

$$\text{Max o Min } f(x) = \sum_{j=1}^n C_j X_j$$

Teniendo referencia:

$$\text{Max o Min } (Z) = C_{11} X_{11} + C_{12} X_{12} + C_{21} X_{21} + \dots + C_{mn} X_{mn}$$

En una forma general será:

$$\text{Max o Min } f(z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

Las restricciones reflejan las limitaciones establecidas por los recursos disponibles para resolver el problema. Su formulación matemática se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{2n} \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{bmatrix}$$

Compuesta por dos matrices, una que contiene los coeficientes técnicos y otra que representa las variables, la ecuación se iguala a un vector que indica los recursos disponibles. Asimismo, la condición de no negatividad establece que todas las variables del modelo deben ser positivas o, como mínimo, iguales a cero.

$$X_j \text{ o } X_{ij} \geq 0 \text{ donde}$$

$$i = 1 \dots m$$

$$j = 1 \dots n$$

La elaboración del modelo matemático, que representa todas las expresiones previas, se resume de la siguiente manera:

Sin referencia

$$\text{Max o Min } (Z) = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 + \dots + C_n X_n$$

C.S.R

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + \dots a_{1n} X_n \leq = b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 + \dots a_{2n} X_n \leq = b_2$$

$$\dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots$$

$$\dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots$$

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + a_{m3} X_3 + \dots a_{mn} X_n \leq = b_m$$

$$X_j \geq 0 \text{ para } i = 1 \dots m; j = 1 \dots n$$

Con referencia

$$\text{Max o Min } (Z) = C_{11} X_{11} + C_{12} X_{12} + C_{13} X_{13} + \dots + C_{mn} X_{mn}$$

C.S.R

$$a_{11} X_{11} + a_{12} X_{12} + a_{13} X_{13} + \dots a_{1n} X_{1n} \leq = b_1$$

$$a_{21} X_{21} + a_{22} X_{22} + a_{23} X_{23} + \dots a_{2n} X_{2n} \leq = b_2$$

$$\dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots$$

$$\dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots$$

$$a_{m1} X_{m1} + a_{m2} X_{m2} + a_{m3} X_{m3} + \dots a_{mn} X_{mn} \leq = b_m$$

$$X_{ij} \geq 0 \text{ para } i = 1 \dots m; j = 1 \dots n$$

2.6. Conceptualización y equivalencias

El coeficiente de contribución (Cij) mide el impacto de cada variable en la optimización de la función, mientras que el coeficiente técnico (aij) determina, mediante un análisis de tiempo y

movimientos, la cantidad de recursos necesarios por unidad de actividad. Además, b_i representa los recursos disponibles y X_{ij} la cantidad de unidades obtenidas de cada recurso.

- **Solución básica factible degenerada:** Ocurre Cuando existen menos de m elementos positivos en las variables X , lo que indica la presencia de un valor cero en la región de solución.
- **Región de factibilidad:** Conjunto que engloba todas las soluciones factibles posibles.
- **Solución factible:** Es la que cumple con las restricciones establecidas por los recursos disponibles.
- **Solución factible básica:** Se caracteriza por tener un máximo de m componentes positivos.
- **Convexidad:** Cuando hay una solución viable, se forma una región convexa. Esta se considera convexa si, para cualquier par de puntos A y B, todos los puntos que conforman el segmento que los une también pertenecen a la misma región.

Ejemplo de una región convexa:

Figura 5:

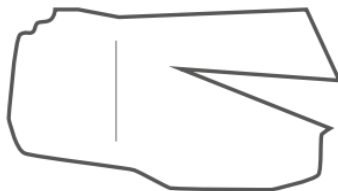
Plano convexo



$$\text{Max o Min } f(z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

Figura 6:

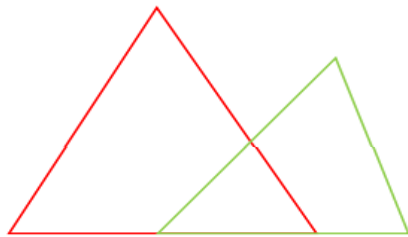
Plano no convexo



Un caso de región convexa en tres dimensiones es la esfera, la cual también se considera un poliedro convexo. Asimismo, cuando dos regiones convexas se intersectan, el resultado sigue siendo una región convexa, como se muestra en la siguiente ilustración.

Figura 7:

Plano de regiones convexas



Si se elige un punto arbitrario M fuera de un polígono convexo, siempre se puede trazar una línea PQ de forma que M y el polígono queden en lados opuestos de dicha línea.

Figura 8:

Punto fuera del plano no convexo



Cualquier número de rectas puede trazarse a partir de un polígono convexo, de manera que cada una de ellas tenga al menos un punto en común con el polígono; estas rectas reciben el nombre de "Rectas de Apoyo".

Se hace referencia al "Plano de apoyo" en el punto P. Es pertinente considerar que el problema del modelo lineal, abordado mediante programación lineal, puede representarse en un espacio de n dimensiones. La región de soluciones factibles

constituye una región convexa o conjunto convexo, que posee esquinas o puntos extremos; si se encuentra una solución óptima, esta se localizará en uno de esos puntos.

En cuanto a las equivalencias, se tiene lo siguiente:

$$\text{Max o Min } f(x) = \sum_{j=1}^n C_j X_j$$

C.S.R.

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b_j$$

$$X_j \geq 0 \text{ para } j = 1 \dots n$$

Dependiendo de las limitaciones de los recursos, el signo de la desigualdad en las restricciones puede adoptar las formas de menor o igual, mayor o igual, o igual.

- La desigualdad $AX \leq b$ es equivalente a $-AX \geq -b$.
- Maximizar CX es equivalente a minimizar $-CX$.
- Minimizar CX es equivalente a maximizar $-CX$.
- La desigualdad $AX \geq b$ es equivalente a $-AX \leq -b$

Si la función objetivo Z tiene un valor finito, significa que al menos uno de los vértices de la región factible representa la solución óptima. Sin embargo, si la solución óptima no es única, pueden existir otros puntos no extremos que también cumplen con esta condición.

2.7. Importancia de la formulación

La etapa de formulación es fundamental en la resolución de un problema lineal, ya que sin un modelo bien estructurado no es posible obtener una solución viable ni óptima. Por ello, es esencial realizar un análisis detallado del problema para identificar correctamente las variables a optimizar y evitar el riesgo de desarrollar un modelo inviable.

2.8. Características del modelo lineal

Al formular un modelo lineal, se debe considerar lo siguiente:

1. La condición de linealidad: se debe evitar el uso de expresiones como; $X_1 X_2$; $a^2 X_1$; $X_1^2 a_1$; $\text{Log } X_1$.
2. No se deben aceptar expresiones en las restricciones del tipo $x_j < 0$, lo que implicaría la presencia de valores negativos para las variables.
3. Las limitaciones de recursos no deben ser negativas, es decir, no deben existir términos negativos en las restricciones ($-b_i$).
4. En el caso de la función objetivo (F.O) con la expresión $\text{Max } z = -X_1 - 2X_2$ se puede multiplicar por (-1) , lo que transformaría la función en $\text{Min } z = X_1 + 2X_2$
5. La variable X_j puede tomar valores fraccionarios, como 5.3 unidades.
6. Un conjunto de variables X_j que cumple con las m restricciones es una posible solución.
7. Si todas las variables satisfacen X_j , la solución se considera factible.
8. El modelo sigue principios de aditividad y multiplicatividad:
 - a. Si el producto A usa 1 hora de la actividad 1 y el producto B requiere 1.5 horas en la misma actividad, juntos consumen 2.5 unidades.
 - b. Si una unidad del producto 1 necesita 3 horas, 6 unidades demandarán 18 horas.
9. Las m restricciones no incluyen la condición de no negatividad.
10. Si una solución factible maximiza o minimiza la función objetivo, es óptima.

Capítulo III

FORMULACIÓN DE CASOS

CAPITULO III: FORMULACIÓN DE CASOS

En este capítulo, se analizarán distintos casos relacionados con problemas empresariales, organizacionales, comerciales y financieros, con el propósito de ofrecer una comprensión detallada sobre la aplicación de los diversos procedimientos requeridos para el desarrollo de un modelo adecuado, y así permitir la resolución efectiva de cualquier tipo de modelo lineal.

3.1. Caso 1

La compañía Babilonia fabrica tres clases de productos para el mercado interno, cuya demanda alcanza las 20,000 unidades. La producción de cada unidad del producto 1 necesita 4 unidades de materia prima y 6 de insumos; el producto 2, 3 unidades de materia prima y 7 de insumos; y el producto 3, 5 unidades de materia prima y 4 de insumos. El comercio cuenta con 30,000 unidades de materiales primarios y 54,000 de componentes. Además, la fabricación de estos productos requiere 60, 45 y 53 horas de actividad por unidad, respectivamente, con un total disponible de 4,500 horas.

La estructura de precios de venta unitarios de los productos comercializados por la empresa Babilonia se establece de la siguiente manera: el producto 1 se valora en \$250 pesos, el producto 2 en \$310 pesos, y el producto 3 en \$270 pesos.

¿Calcule la cantidad de unidades a producir de cada producto y estime los ingresos totales generados? Para ello, plantee el problema y emplee técnicas de modelado lineal con el fin de obtener la solución óptima.

Solución:

Primer paso: Definir la variable de decisión

X_1 = Cantidad de unidades que se producirán del producto 1 (u)

X_2 = Cantidad de unidades a fabricar del producto 2 (u)

X_3 = Cantidad de unidades que se elaborarán del producto 3 (u)

Segundo Paso: Definir la Función Objetivo

$$\text{Maximizar } I = 250 \text{ \$/u} \cdot X_1(u) + 310 \text{ \$/u} \cdot X_2(u) + 270 \text{ \$/u} \cdot X_3(u)$$

Tercer Paso: Definir las Restricciones

$$\text{Materia Prima: } 4 \text{ (u.m.p) } /u * X_1 (u) + 3 \text{ (u.m.p) } /u * X_2 (u) + 5 \text{ (u.m.p) } /u * X_3 (u) \leq 30000 \text{ u.m.p}$$

$$\text{Insumos: } 6 \text{ u.ins}/u * X_1 (u) + 7 \text{ u.ins}/u * X_2 (u) + 4 \text{ u.ins}/u * X_3 (u) \leq 54000 \text{ u.ins}$$

$$\text{Mano de Obra: } 60 \text{ h}/u * X_1 (u) + 45 \text{ h}/u * X_2 (u) + 53 \text{ h}/u * X_3 (u) \leq 4500 \text{ h}$$

Cuarto Paso: Condición no negatividad

$$X_j \geq 0 \text{ para todo } j = 1, \dots, n$$

Modelo Matemático

$$\text{Max } I_T = 250X_1 + 310X_2 + 270X_3$$

C.S.R.

$$4X_1 + 3X_2 + 5X_3 \leq 30000$$

$$6X_1 + 7X_2 + 4X_3 \leq 54000$$

$$60X_1 + 45X_2 + 53X_3 \leq 4500$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

3.2. Caso 2

Un banco de la región está evaluando su estrategia comercial para la concesión de créditos en el próximo semestre, con el objetivo de optimizar su oferta financiera. Se ha destinado una suma de \$20,000,000. Entre sus condiciones, está la obligación de ofrecer su servicio sin exclusividad de clientes, así como también otorgar créditos a los mismos. La tabla a continuación muestra las diferentes líneas de crédito, la tasa de interés aplicada (E.T.) y el porcentaje de cartera irrecuperable.

En otras palabras, que los clientes incumplan con sus compromisos de pago respecto al crédito otorgado. La tasa de interés aplicada es de carácter mensual.

En un entorno bancario caracterizado por una elevada competitividad, se establece la necesidad de optimizar la asignación de recursos crediticios. Las directrices del mercado exigen que el 45% del capital destinado a préstamos se dirija a las líneas industrial y comercial. Asimismo, se

impone la restricción de que al menos el 45% de los préstamos personales otorgados a actividades agrícolas. La entidad bancaria, en su política de gestión de riesgo, establece un límite máximo del 3.5% para la cartera de difícil cobro, asumiendo que la morosidad implica la pérdida de ingresos por intereses. Ante este escenario, se requiere un análisis estratégico para determinar la asignación óptima de recursos crediticios, maximizando la rentabilidad y minimizando el riesgo.

Tabla 1*Información básica*

Prestamos	Tasa de Interés (%)	Probabilidad Cartera Difícil Cobro (%)
Industrial	3.5	4
Comercial	3.0	3
Vivienda	2.5	2
Personales	4.0	12
Agrícola	2.0	6

Solución:

Primer Paso: Definimos la variable de decisión

X_1 = Cantidad de Dinero (\$) destinado a crédito Industrial (\$)

X_2 = Cantidad de Dinero (\$) destinado a crédito Comercial (\$)

X_3 = Cantidad de Dinero (\$) destinado a crédito Vivienda (\$)

X_4 = Cantidad de Dinero (\$) destinado a crédito personal (\$)

X_5 = Cantidad de Dinero (\$) destinado a crédito Agrícola (\$)

Segundo Paso: Definimos la función objetivo

Donde:

R. Neto = Rendimiento neto

$$\text{Maximizar R. Neto} = 0.1087*(.96X_1 (\$)) + 0.0927*(0.97X_2 (\$)) + 0.0769*(0.98X_3 (\$)) + 0.1249*(0.88X_4 (\$)) + 0.0612*(0.94X_5 (\$))$$

En una forma simplificada

$$\text{Máx RN} = 0.1044X_1 (\$) + 0.0899X_2 (\$) + 0.0754X_3 (\$) + 0.1099X_4 (\$) + 0.0575X_5 (\$)$$

Tercer paso: Definimos las restricciones

Monto destinado a crédito

$$X_1 (\$) + X_2 (\$) + X_3 (\$) + X_4 (\$) + X_5 (\$) \leq \$20.000.000$$

Monto destinado a créditos industrial y comercial

$$X_1 (\$) + X_2 (\$) \leq 0.45*(\$) 20.000.000$$

Es decir:

$$X_1 (\$) + X_2 (\$) \leq \$ 9.000.000$$

Monto préstamos vivienda

$$X_3 (\$) \geq 0.45*(X_1 (\$) + X_2 (\$) + X_3 (\$))$$

Es decir:

$$-0.45X_1 (\$) - 0.45X_2 (\$) + 0.55X_3 (\$) \geq 0$$

Límite cartera difícil cobro

$$0.04X_1 (\$) + 0.03X_2 (\$) + 0.02X_3 (\$) + 0.12X_4 (\$) + 0.06X_5 (\$) \leq 0.035*(X_1 (\$) + X_2 (\$) + X_3 (\$) + X_4 (\$) + X_5 (\$))$$

Es decir

$$0.005X_1 (\$) - 0.005X_2 (\$) - 0.015X_3 (\$) + 0.085X_4 (\$) + 0.025X_5 (\$) \leq 0$$

Cuarto paso: Definir la condición de no negatividad

Restricción de no negatividad

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$$

Quinto paso: Definir el modelo matemático

$$\text{Maximizar R. Neto} = 0.1044X_1 + 0.0899X_2 + 0.0754X_3 + 0.1099X_4 + 0.0575X_5$$

C.S.R.

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \leq 20.000.000$$

$$X_1 + X_2 \leq 9.000.000$$

$$0.45X_1 - 0.45X_2 + 0.55X_3 \geq 0$$

$$0.005X_1 - 0.005X_2 - 0.015X_3 + 0.085X_4 + 0.025X_5 \leq 0$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$$

3.3. Caso 3

Un ganador del Baloto decide invertir sus \$100 millones en la Bolsa de Valores de Colombia, eligiendo entre acciones A, con menor riesgo y un 6 % de rentabilidad, y acciones B, más riesgosas, pero con un 9 % de rendimiento. Para su inversión, establece las siguientes condiciones: no destinar más de \$50 millones a las acciones B, invertir al menos \$20 millones en acciones A y asegurarse de que la inversión en B no sea menor que en A. ¿Cómo debería distribuir su capital para maximizar su beneficio?

Solución:

Primer paso: Definir las variables de decisión

X_1 = Cantidad de dinero a invertir en la acción A (\$)

X_2 = Cantidad de dinero a invertir en la acción B (\$)

Segundo paso:

$$\text{Maximizar B} = 0.06 * X_1 (\$) + 0.09 * X_2 (\$)$$

Tercer Paso: Definir las restricciones

Restricción de presupuesto de inversión

$$X_1 (\$) + X_2 (\$) \leq 100 (\$) \text{ millones}$$

Restricción de monto de la inversión en acción A

$$X_1 \leq 20 (\$) \text{ millones}$$

Restricción de monto de la inversión en acción B

$$X_2 \leq 50 (\$) \text{ millones}$$

Restricción de proporcionalidad

$$X_2 (\$) \geq X_1 (\$)$$

Cuarto paso: Condición de no negatividad

$$X_{ij} \geq 0 \text{ para todo } i = 1 \dots m \text{ y todo } j = 1 \dots n$$

Quinto paso: Definir modelo matemático

$$\text{Maximizar Beneficio} = 0.06X_1 + 0.09X_2$$

C.S.R

$$X_1 + X_2 \leq 100$$

$$X_1 \geq 20$$

$$X_2 \leq 50$$

$$-X_1 + X_2 \geq 0$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Capítulo IV

MÉTODOS DE SOLUCIÓN ÓPTIMA

CAPITULO IV: MÉTODOS DE SOLUCIÓN ÓPTIMA

Este campo se fundamenta en una diversidad de metodologías diseñadas para la identificación de soluciones óptimas. Cada una de estas metodologías se sustenta en un modelo matemático riguroso, el cual sirve como base para analizar y resolver problemas complejos.

1. **Método gráfico:** Este método se aplica cuando el problema involucra únicamente dos variables, permitiendo que su solución sea obtenida de manera gráfica. Aunque también es posible utilizar este enfoque en problemas con tres variables, la complejidad de la solución aumenta considerablemente.
2. **Modelo determinístico del transporte:** Representa un método extremadamente eficaz para resolver una variedad de desafíos en programación lineal. En consecuencia, es lógico considerar que, para ciertas categorías específicas de problemas, existen procedimientos de solución alternativos que requieren menor dificultad que el Método Simplex. El problema del transporte es un caso de desafío particular conocido.
3. **Método de la esquina Noroeste:** Se trata de un procedimiento aproximado diseñado para solucionar desafíos de traslado o distribución, obteniendo una solución base inicial que cumpla con todas las restricciones planteadas, aunque sin asegurar que se alcance el costo óptimo total.
4. **Método Simplex:** Dentro de la programación lineal y la investigación de operaciones determinística, el método simplex es una herramienta fundamental para la resolución de problemas que involucran múltiples variables de decisión.
5. **Método del Gran M:** Este procedimiento es útil en situaciones donde las restricciones son del tipo "mayor o igual" y se emplea para encontrar la mejor solución posible, ya sea maximizando o minimizando la función objetivo.
6. **Modelo determinístico DUAL:** La ****dualidad**** es un avance clave en la programación lineal, que indica que cada problema de optimización tiene un problema asociado llamado ****dual****. Esta relación facilita el análisis en la informática, la evaluación económica y el estudio postóptimo.
7. **Método Vogel:** Se trata de un procedimiento heurístico empleado para abordar problemas de optimización vinculados al transporte y los costos relacionados.

Capítulo V

PROBLEMAS ESPECÍFICOS

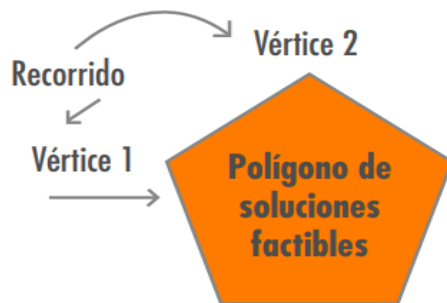
CAPITULO V: PROBLEMAS ESPECÍFICOS

5.1. Método Simplex

El método simplex es clave en la programación lineal, ya que permite resolver problemas con múltiples variables de decisión. A medida que estas aumentan, los cálculos se vuelven más complejos. Este método identifica la solución óptima explorando los vértices del polígono de soluciones factibles, donde cada uno representa una solución factible básica, hasta encontrar la mejor opción.

Figura N° 9:

Polígono de soluciones factible



Cada vértice representa una solución factible básica, y su análisis estratégico optimiza tiempo y esfuerzo en la búsqueda de la mejor solución.

Debido a que el procedimiento gráfico es poco práctico para desafíos con numerosas variables, el Método Simplex facilita la resolución mediante ecuaciones algebraicas, haciéndolo más eficiente.

La iteración es el proceso de desplazamiento entre vértices, durante el cual las variables y la función se ajustan, obteniendo así una nueva solución factible básica.

Para efectuar el proceso de recorrido en el Método Simplex, es imprescindible reformular el modelo matemático del problema, dado que este se encuentra estructurado mediante inecuaciones, lo que dificulta su tratamiento algebraico. Para transformar dichas inecuaciones en ecuaciones, se implementan ajustes específicos: en las restricciones del tipo "menor o igual", se

incorporan variables de holgura (X_H), mientras que en las desigualdades “mayor o igual”, es necesario añadir una variable de holgura negativa, acompañada de una variable artificial positiva, garantizando así la viabilidad del procedimiento.

Examinemos el siguiente caso: se presenta una restricción de la siguiente manera:

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 20$$

¿Cómo transformar esta inecuación en una ecuación?

Para lograrlo, inicialmente incorporamos una variable de holgura:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_H = 20$$

Donde X_H es la variable de holgura. Esta ecuación equivale a:

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 20$$

Donde la desigualdad se convierte en una igualdad, permitiendo trabajar con una ecuación lineal.

Si la limitación original tiene la forma $X_4 \geq 0$, el método para transformar la desigualdad en una igualdad sería el siguiente:

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 20$$

Se multiplica la restricción por -1, lo que da como resultado:

$$-X_1 - X_2 - X_3 \leq -20$$

Se introduce una variable de holgura y se sustrae una variable artificial con el propósito de eliminar la desigualdad y corregir la negatividad del valor bi, obteniendo así una ecuación equivalente:

$$-X_1 - X_2 - X_3 + X_4 - X_5 = -20$$

Nuevamente multiplicamos por (-1) la ecuación obtenida, de la siguiente manera:

$$X_1 + X_2 + X_3 - X_4 + X_5 = 20$$

En esta situación, se evidencia que se sustrae una variable de holgura y se incorpora una variable artificial, lo que permite corregir la restricción de tipo mayor o igual.

¿Y cuál es el efecto sobre la función objetivo?

Cuando la limitación es de tipo inferior o igual, la función se expresa de la siguiente manera:

$$\text{Máx. } z = 5x_1 + 9x_2$$

De este modo, con la inclusión de la variable de holgura, la función objetivo sería:

$$\text{Máx. } z = 5x_1 + 9x_2 + 8X_3 + 0X_4$$

En este contexto, la variable de holgura presenta un coeficiente de valor nulo, lo que significa que no influye en el proceso de optimización de la función.

En el caso de la desigualdad mayor o igual, al maximizar la función objetivo, se tendría:

$$\text{Máx. } z = 5x_1 + 9x_2 + 8X_3 + 0X_4 - MX_5$$

Si se trata de minimizar:

$$\text{Min. } Z = 5x_1 + 9x_2 + 8X_3 + 0X_4 + M_X$$

Donde a la variable ficticia se le atribuye un coeficiente de "M", simbolizando un valor sumamente grande.

El método simplex para resolver un problema puede llevarse a cabo de dos maneras: mediante el método algebraico o utilizando el método de simplex. Este último, a su vez, puede implementarse de dos formas: a través de la eliminación de Gauss o utilizando la tabla del método simplex.

Cuando se dispone de m ecuaciones con n variables (donde $n \geq m$), se obtiene una solución asignar un valor de cero a $n + m$ variables. Luego, se determinan los valores de las m variables restantes, asegurando que estos sean no negativos (≥ 0) y cumplan con las restricciones del sistema.

Una solución básica factible no degenerada es aquella en la que todas las variables básicas tienen valores positivos, mientras que las variables no básicas se fijan en cero.

5.2. Complicaciones del Método Simplex

Consideremos el siguiente modelo matemático:

$$\text{Máx. } z = 12x_1 + 14x_2$$

C.S.R.

$$x_1 \leq 20$$

$$x_2 \leq 18$$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 32$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

a. Caso I: Minimización en la función objetivo

Multiplicar por (-1)

$$\text{Min. } Z = -5x_1 - 9x_2$$

Es equivalente a:

$$(-) \text{ Máx. } z = 5x_1 + 9x_2$$

Cuando la función es de minimización, se multiplica por (-1) y se procede como si fuera una maximización.

b. Caso II: Desigualdad en ambas direcciones

En otras palabras, la restricción tiene la forma ($\geq$) en lugar de ($\leq$).

Considerando la restricción siguiente:

$$4x_1 + 3x_2 \geq 21$$

Al multiplicarla por (-1), su forma equivalente es:

$$-4x_1 - 3x_2 \leq -21$$

c. Caso III: Si los bi son negativos

El problema surge cuando el valor del lado derecho de la inecuación (bi) es negativo, ya que esto viola la condición de no negatividad y genera una solución degenerada. Una estrategia común es tratarlo como una restricción mayor o igual. Para solucionarlo, se pueden aplicar diversas alternativas:

- Seleccionar una variable distinta a las de holgura para ser usada como variable básica, lo que conlleva un mayor esfuerzo en los cálculos algebraicos y un proceso de prueba y error más extenso para encontrar la solución factible y no degenerad.
- Introducir una variable de holgura y una variable artificial, lo cual se resuelve mediante el denominado Método del Gran M.

Supongamos la restricción:

$$4X_1 + 3X_2 \geq 21$$

Su forma equivalente sería:

$$-4X_1 - 3X_2 - X_H + X_A = 21$$

Al introducir las variables X_H (de holgura) y X_A (artificial), hemos eliminado la restricción original, ya que el término $(-X_H + X_A)$ puede asumir cualquier valor. No obstante, podemos garantizar que, al final, el valor de x_A será cero.

Respecto a la función objetivo, la modificación pertinente sería la siguiente:

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 6x_2,$$

Cuya forma equivalente sería:

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 6x_2 - Mx_A$$

d. Caso IV: Cuando hay una restricción con signo igual

Al descomponerla en dos restricciones, las cuales son comparables y presentan signos desiguales, de la siguiente manera.

$$4X_1 + 5X_2 = 32$$

$$4X_1 + 5X_2 \leq 32$$

$$4X_1 + 5X_2 \geq 32$$

- Ambas restricciones finales son idénticas a la primera.
- Del mismo modo, podría eliminarse la igualdad al despejar una variable y sustituirla en las demás restricciones, lo que facilita la resolución del problema.

Al dividir la igualdad en dos restricciones, se genera una de tipo "menor o igual", que se resuelve siguiendo el procedimiento del primer caso, y otra de tipo "mayor o igual", que se aborda conforme al método del tercer caso.

e. Caso V: Variables sin restricciones en signo

Si la variable X_j no está limitada por la condición de no negatividad, se puede abordar de la siguiente forma: en caso de que X_1 no tenga restricción de signo, se sustituye por $(y_1 - w_1) \geq 0$ o y luego se sustituye el valor de X_1 .

Modelo original

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

C.S.R.

$$6x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 20$$

x_1 no restringida en signo, $x_2 \geq 0$

El modelo, al reemplazar la variable sujeta a restricción de signo, se sustituye la variable correspondiente en el contexto planteado x_1 por $(y_1 - w_1)$

$$\text{Max } Z = 3(y_1 - w_1) + 2x_2$$

C.S.R.

$$6(y_1 - w_1) + 2x_2 \leq 12$$

$$4(y_1 - w_1) + 3x_2 \leq 20$$

$$y_1, w_1, x_2 \geq 0$$

La siguiente es la estructura de la tabla del simplex:

Tabla 2

Estructura del método simplex en forma tabular

	C_j	C_i		C_n	
C_B	b_i	X_1		X_n	a/b
C_{1B}	b_1	a_{11}		a_{1n}	b_1/a_{1n}
C_{2B}	b_2	a_{21}		a_{2n}	b_2/a_{2n}
.	.	.		.	.
.	.	.		.	.
C_{nB}	b_m	a_{m1}		a_{mn}	b_m/a_{mn}
	Z_T	$Z_1 - C_1$		$Z_n - C_n$	

En su representación matricial:

$[C_1 C_2 \dots C_n]$ Vector fila de los coeficientes de contribución.

$[X_1 X_2 \dots X_n]$ Vector fila de las variables de decisión.

$$\begin{bmatrix} C_{1B} \\ C_{2B} \\ \dots \\ C_{nB} \end{bmatrix}$$

Vector columna de las variables básicas en la base.

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Vector de la disponibilidad de recursos.

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz de las variables de decisión.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz de coeficientes técnicos.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de identidad de las variables de holgura.

$$[Z_1 - C_1 \quad Z_2 - C_2 \quad \dots \quad Z_n - C_n]$$

El vector fila utilizado para determinar la variable que se incorpora a la base.

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ a_{1n} \\ b_2 \\ a_{2n} \\ \dots \\ \dots \\ b_m \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

La regla para realizar el cambio de las variables (vectores) en la base consiste en determinar cuál de las variables (no básicas) ingresará a la base.

Calcule $Z_k - C_k = \min (Z_j - C_j) ; Z_j - C_j < 0$, luego X_k entra a la base.

- La variable (básica) que sale de la base

Calcule $\frac{b_m}{a_{mn}} = \min(\frac{b_m}{a_{mn}})$ donde $a_{mn} \geq 0$

5.3. Solución del Método Simplex

Para la resolución del método simplex, generalmente se emplean tanto la eliminación de Gauss como el método de la tabla del simplex.

En este caso, se optará por utilizar la tabla del simplex, procedimiento que involucra el manejo de los coeficientes de la función objetivo y las restricciones.

Supongamos el siguiente ejercicio:

$$\text{Máx } Z = 10X_1 + 6X_2$$

C.S.R

$$4X_1 + 3X_2 \leq 17$$

$$6X_1 + 2X_2 \leq 12$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

El modelo matemático se formulará con el propósito de llevarlo a la tabla del simplex, convirtiendo las inecuaciones en ecuaciones mediante la incorporación de variables de holgura. De igual manera, su función objetivo se expresa de la siguiente manera:

$$\text{Máx } Z = 10X_1 + 6X_2 + 0X_3 + 0X_4$$

$$4X_1 + 3X_2 + X_3 = 17$$

$$6X_1 + 2X_2 + X_4 = 12$$

Una vez que el problema ha sido transformado en ecuaciones, se procede a construir la tabla del simplex. En primer lugar, se trasladan los datos iniciales del problema a la tabla, tal como se presenta a continuación.

Tabla 3*Construcción de la tabla*

	C_j		10	6	0	0		
C_B	X_B	B	X_1	X_2	X_3	X_4	b/a	
0	X_3	17	4	3	1	0	17/4	4.25
0	X_4	12	6	2	0	1	12/6	2.0
	Z	0	-10	-6	0	0		
			$Z_1 - C_1$	$Z_2 - C_2$	$Z_3 - C_3$	$Z_4 - C_4$		

Los coeficientes de las variables en la función objetivo se encuentran en la primera fila.

En la segunda fila, se identifican las columnas según su funcionalidad de la siguiente manera:

Columna 1: Coeficientes de las variables en la base, Columna 2: Variables básicas iniciales, que son las de holgura.

Columna 3: Valores de los términos independientes, Columna 4: Coeficientes de la primera variable en las restricciones.

Columna 5: Coeficientes de la segunda variable en las restricciones, Columna 6: Coeficientes de la tercera variable en las restricciones y Columna 7: Coeficientes de la cuarta variable en las restricciones.

La última columna muestra el resultado de dividir el término independiente de cada restricción entre el coeficiente técnico de la variable seleccionada. La última fila contiene los valores de $(z - c)$, que indican qué variable entra a la base. A partir de la tabla inicial, se determina que $Z_1 - C_1$ corresponde a la primera variable, y su cálculo se realiza de la siguiente manera:

$$Z_1 = 0 \cdot 4 + 0 \cdot 6 = 0; C_1 = 10;$$

Luego,

$$Z_1 - C_1 = (0 - 10) = -10 \text{ (que aparece con color azul);}$$

Así, se calculan las demás variables y se identifica la más negativa, que pasa a ser la nueva variable básica. Luego, se determina la variable que abandonará la base, utilizando la columna de los valores (b/a) según el siguiente criterio.

Se calcula la razón dividiendo b_1 entre el coeficiente técnico de la variable entrante, obteniendo los valores (4.25; 2.0). Se selecciona el menor valor positivo, indicando la variable que ingresa y la que sale. El punto de intersección en la matriz se denomina elemento pivote. Cada movimiento entre los vértices del polígono de soluciones factibles es una iteración, y con este proceso se da inicio a la primera iteración.

Tabla 4

Resultados

	C_j		10	6	0	0		
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	b/a	
0	x_3	9	0	5/3	-2/3	9/5/3	5.4	→
10	x_1	2	1	1/3	0	1/6	2/1/3	6.0
	Z	20	0	-8/3	0	5/3		
			$Z_1 - C_1$	$Z_2 - C_2$	$Z_3 - C_3$	$Z_4 - C_4$		

En la tabla previa, se normaliza la fila que contiene el elemento pivote dividiendo cada uno de sus componentes por el nuevo valor asignado a dicho pivote. A partir de esta normalización, se determinan los demás valores de la tabla mediante el siguiente procedimiento: por ejemplo, se asigna a la celda b_i correspondiente a la variable x_3 en la base el valor de 9, y se obtiene utilizando la fórmula: $b_n = 17 - ((12 * 4) / 6) = 9$.

En la tabla previa, es necesario estructurar un triángulo para llevar a cabo el cálculo. Este procedimiento se repite en todas las posiciones vacías, expandiendo el triángulo y aplicando el cálculo a la nueva ubicación de x_2 en la primera fila de la matriz de coeficientes técnicos, alineada con la primera restricción. Como resultado, se obtiene la siguiente igualdad: $3 = 3 - ((4 * 2) / 6) = 5/3$.

Este procedimiento se repite en cada posición nueva, utilizando siempre el elemento pivote para efectuar la división. De este modo, al calcular los nuevos valores, se divide sistemáticamente

por dicho elemento. En particular, para la variable X_4 en la matriz de coeficientes técnicos, se obtiene: $\theta = ((4 \cdot 1) / 6) = -2/3$.

Las variables X_1 y X_3 en la base conforman una matriz identidad, asignando valores de uno y cero según las restricciones. En la matriz de coeficientes técnicos del método Simplex, las filas corresponden a las restricciones del problema en orden secuencial. Luego, se calculan los valores de $(z - c)$ para identificar los negativos, lo que indica que X_2 ingresa a la base. Posteriormente, se determina la variable que sale, siendo X_3 la menor positiva. El elemento pivote es $5/3$ y, con las variables entrante y salientes definidas, se procede a la segunda iteración:

Tabla 5

Segunda iteración

	C_j		10	6	0	0		
C_B	X_B	B	X_1	X_2	X_3	X_4	b/a	
6	X_2	5.4	0	1	3/5	-2/5		
10	X_1	0.2	1	0	-1/5	3/10		
	Z	34.4	0	0	1.6	0.6		
			$Z_1 - C_1$	$Z_2 - C_2$	$Z_3 - C_3$	$Z_4 - C_4$		

En la segunda iteración, al recalcular el valor de X_4 en la segunda restricción de la matriz de coeficientes técnicos, se obtiene la siguiente expresión: $1/6 = 1/6 - ((1/3 \cdot (-2/3)) / (5/3)) = -2/5$. Al examinar la tabla actualizada, se evidencia que todos los valores de $(z - c)$ son positivos, lo cual confirma que se ha alcanzado la solución óptima del problema. Por consiguiente, la solución final es:

$$X_1^* = 0.2$$

$$X_2^* = 5.4$$

$$Z^* = 34.4$$

Dentro del contexto del método simplex, se observa que las variables X_3 y X_4 tienen un valor de cero, lo cual las excluye del conjunto de variables básicas. Esta situación implica que dichas variables no intervienen en la formulación de la solución, resultando en una contribución nula a la función objetivo.

La interpretación económico-financiera de los resultados obtenidos de la solución óptima varía según el tipo de problema que se esté abordando. No obstante, en el contexto de nuestro ejemplo, supondremos que el objetivo es maximizar las ventas de dos productos que requieren materia prima e insumos para su producción. En consecuencia, la interpretación y el análisis de los resultados son:

Dentro del marco de la función objetivo, se ha estipulado que cada producto se asigna un precio de venta, fijándose estos en \$10 y \$6 pesos, respectivamente.

$$\text{Máx } Z = 10X_1 + 6X_2$$

A continuación, los ingresos totales por las ventas suman exactamente: \$/u $10 \cdot 0.2$ (u) + \$/u $6 \cdot 5.4$ (u) = \$34.4

Para obtener un ingreso total de \$34.4 pesos, se requeriría vender 0.2 unidades del primer producto y 5.4 del segundo, según el método simplex. Sin embargo, en productos como el pan, no es posible fraccionar unidades, por lo que se debe redondear al número entero más cercano. Así, producir 0 unidades de pan aliñado y 5 de pan francés generaría \$30.0 pesos. En cambio, con productos como el oro, que se vende por onzas, sí es viable la fracción, permitiendo alcanzar los \$34.4 pesos, ya que 0.2 onzas a \$10 cada una sumarían \$2.

Se analiza el uso de los recursos considerando las restricciones obtenidas en la solución óptima. La primera se asocia a la materia prima y la segunda al suministro de insumos, desarrollando el estudio en función de estos criterios:

$$4X_1 + 3X_2 \leq 17$$

$$4 \cdot 0.2 + 3 \cdot 5.4 \leq 17$$

$$0.8 + 16.2 \leq 17$$

En cuanto a la materia prima, se utilizó toda la disponible, ya que 17 es menor o igual a 17.

Restricción de insumos.

$$6X_1 + 2X_2 \leq 12$$

$$6 \cdot 0.2 + 2 \cdot 5.4 \leq 12$$

$$1.2 + 10.8 \leq 12$$

El resultado $12 \leq 12$ indica que se utilizaron todos los insumos disponibles.

En el caso de que el resultado fuera $10 \leq 12$, implicaría que quedaron dos unidades de insumos disponibles, las cuales podrían ser empleadas en otra actividad.

Si se hubiera utilizado el software WinQSB, los resultados se presentarían de la siguiente manera.

Tabla 6

Resultados

Variable Decisión	Valores Solución	Costo Unitario o ganancia	Total Contribución	Costo reducido	Estado Básico	Mínimo Permisible de C_j	Máximo Permisible de C_j
X_1	0,2000	10	2	0	Básica	8	18
X_2	5,4000	6	32,4	0	Básica	3,333	7,5
Función	Objetivo	maximizar	34,4				
Restricción	Lado Izquierdo	Dirección	Lado Derecho	Necesidad	Precio sombra	Mínimo permisible RHS	Máximo Permisible RHS
C_1	17	$\leq$	17	0	1,6	8	18
C_2	12	$\leq$	12	0	0,6	11,33	25,5

La sección inicial de la tabla refleja el impacto generado en la función objetivo, mientras que la segunda sección representa las afectaciones en las restricciones del problema.

Resumen del análisis de la función objetivo:

Variables de decisión: X_1 y X_2

Valores óptimos: $X_1=0.2$, $X_2=5.4$

Costo unitario: $X_1=10$, $X_2=6$

Contribución total: $X_1=2$, $X_2=32.4$

Costo reducido: No presenta reducciones.

Variables básicas: Permanecen en la base tras el método simplex.

Mínimo permitido en la contribución: X_1 , puede bajar hasta **8 pesos**.

Máximo incremento permitido: X_1 puede subir hasta **18 pesos**.

La misma metodología de interpretación se aplica a la variable X_2 , concluyendo con la evaluación del valor total de la función objetivo.

En última instancia, el valor óptimo de la función objetivo se determina al sumar las aportaciones específicas de cada variable, lo que se traduce en un total de 34.4.

En lo que respecta a las incidencias sobre las restricciones, se tiene la siguiente estructura de análisis: La primera columna representa las restricciones, denominadas restricción 1 y restricción 2. La segunda columna corresponde al lado izquierdo de la restricción, indicando el límite inferior dentro del cual puede fluctuar la disponibilidad del recurso asociado. En este caso, el valor mínimo requerido para garantizar la producción del recurso es de 17 unidades.

Columna 3: Indica la dirección de la restricción mediante los operadores $\leq$, $=$ o $\geq$, definiendo cómo puede variar la disponibilidad del recurso.

Columna 4: Representa el límite superior del recurso, estableciendo el máximo permitido. En este caso, no debe superar 17 unidades para la producción.

Columna 5: Representa la holgura o excedente, indicando si hay recursos disponibles en exceso o si existe un déficit en su asignación.

Columna 6: Contiene el precio sombra, que establece el valor obtenido al comercializar una unidad adicional del recurso.

Columna 7: Señala el umbral mínimo de disponibilidad, determinando cuánto puede reducirse el recurso, con un límite de 8 unidades en este caso. Y Columna 8: Representa el umbral máximo admisible, indicando el incremento permitido en la cantidad del recurso, que puede expandirse hasta 18 unidades.

Este mismo análisis se aplica a la variable X_2 , garantizando coherencia en la evaluación de restricciones y su impacto en la optimización del modelo.

Capítulo VI

MODELOS DE TRANSPORTES

CAPITULO VI: MODELOS DE TRANSPORTES

6.1. Modelo determinístico del transporte

El Problema del Transporte es un caso particular de la programación lineal, para el cual existen métodos de resolución más eficientes que el Método Simplex. Dado este hecho, es razonable suponer que ciertos problemas tienen enfoques optimizados. El Método Simplex, no obstante, sigue siendo una técnica poderosa y ampliamente utilizada para la resolución de diversas clases de problemas en programación lineal.

Se considera un problema en el que n centros de distribución deben ser abastecidos por m fábricas. Cada fábrica i (donde $i = 1, 2, \dots, m$) tiene una capacidad de producción de a_{ij} unidades del producto por periodo. A su vez, cada centro de distribución j (donde $j = 1, 2, \dots, n$) demanda b_j unidades en el mismo periodo. El costo asociado al traslado de x_{ij} unidades desde la fábrica i hasta el centro de distribución j está representado por C_{ij} .

Para alcanzar una solución óptima mediante la aplicación del Método Simplex, es imprescindible establecer la formulación matemática adecuada para este problema

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{C.S.R.} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &\geq 0, \text{ para } i=1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &\geq d_j \text{ para } j=1, \dots, n \end{aligned}$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ para } i=1,2,3 \text{ y } j=1,2,3,4,5$$

Observación sobre el modelo

$$\begin{array}{cccc} 1. & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n o_{ij} & = & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} & \sum_{j=1}^n d_i & = & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} \\ & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ & \boxed{\text{Disponibilidad}} & & \boxed{\text{Total}} & \boxed{\text{Demanda}} & & \boxed{\text{Total, enviado}} \end{array}$$

Es decir que:

$$\sum_{i=1}^m o_i = \sum_{j=1}^n d_j$$

$\downarrow$
Oferta total

$\downarrow$
Demanda

Cuando las restricciones presentan desigualdades, es posible introducir una fábrica o un centro de distribución ficticio con el propósito de equilibrar la sumatoria entre la oferta y la demanda. Dado que los coeficientes en las restricciones son uniformemente iguales a uno, la resolución del problema mediante el Método Simplex resulta compleja debido a la cantidad considerable de variables y restricciones involucradas. No obstante, existe un enfoque más simplificado para abordar el Problema del Transporte, el cual será expuesto a continuación. Este método reformula el problema en términos matriciales, en lugar de representarlo mediante un sistema de ecuaciones. A continuación, se presenta la estructura general de la matriz junto con la ubicación de las diversas constantes y variables.

Tabla 7

Modelo de la matriz del transporte

D O	Destinos							Oferta
	1	2	3		n-2	n-1	n	
Fuentes (Orígenes)	C_{11}	C_{12}	C_{13}				C_{1n}	O_1
	X_{11}	X_{12}	X_{13}				X_{1n}	
	C_{21}	C_{22}	C_{23}				C_{2n}	O_2
	X_{21}	X_{22}	X_{23}				X_{2n}	
	.	.	.		.	.	.	.
	C_{m1}	C_{m2}	C_{m3}				C_{mn}	O_m
	X_{m1}	X_{m2}	X_{m3}				X_{mn}	
Demanda	d_1	d_2	d_3		d_{n+2}	d_{n-1}	d_n	$\sum d = \sum o$

1. Construir la matriz de transporte
2. Serán nulos los costos en el centro de producción.
3. Establece el equilibrio $\sum_{i=1}^m O_i = \sum_{j=1}^n d_j$

4. Si $\sum_{i=1}^m O_i > 0$ se incorpora una demanda simulada.
5. Si $\sum_{j=1}^n d_j > 0$ se agrega una oferta o capacidad de una fábrica ficticia.
6. Las variables X_{ij} indican la cantidad de unidades a transportar del origen i al destino j .

Ejemplo ilustrativo del problema del transporte

Una empresa ha tomado la decisión de fabricar parcial o totalmente cinco nuevos productos en tres de sus plantas de producción, las cuales cuentan con capacidad excedente.

Los productos serán comercializados en función de su peso, con un precio unitario de \$100. Para simplificar el análisis, se establece que cada unidad de producto representa una medida estandarizada de dicho artículo, y el esfuerzo requerido para su manufactura es equivalente en todos los casos.

Las capacidades de producción disponibles en cada una de las fábricas se detallan a continuación.:

Tabla 8

Capacidad

Fábricas	Capacidad
1	40
2	60
3	90

En el presente caso, la clasificación específica del producto (ya sea del tipo 1, 2, 3, 4 o 5) no afecta el análisis. Un estudio de mercado ha permitido determinar las proyecciones de ventas potenciales:

Tabla 9

Información de productos

Productos	1	2	3	4	5
Ventas potenciales	30	40	70	40	60

A continuación, se presentan los costos variables involucrados en la producción de cada producto, considerando las distintas plantas de fabricación y sus respectivos niveles de eficiencia:

Tabla 10

Costos variables

Producto Fábricas	1	2	3	4	5
1	20	19	14	21	16
2	15	20	13	19	16
3	18	15	18	20	X

Para satisfacer las necesidades del mercado, ¿cuál debe ser la cantidad de cada producto a fabricar en ese sentido?

Solución

- **Formulación según matriz de transporte**

Se presenta la matriz de transporte, donde las ofertas representan la capacidad productiva de cada fábrica. Las variables de decisión (x_{ij}) indican la cantidad de productos j fabricados en la planta i . En este modelo, los destinos corresponden a los productos o clientes, y los orígenes a las fábricas, permitiendo estructurar el problema como un modelo de transporte.:

Tabla 11

Matriz de transporte

Productos Fábricas	Productos					Oferta
	1	2	3	4	5	
Fábricas	1 x_{11}	19 x_{12}	14 x_{13}	21 x_{14}	16 x_{15}	40
	15 x_{21}	20 x_{22}	13 x_{23}	19 x_{24}	16 x_{25}	60
	18 x_{31}	15 x_{32}	18 x_{33}	20 x_{34}	M x_{35}	90
Demanda	30	40	70	40	60	190 240

Si la capacidad de producción de las fábricas no cubre la demanda total, se añade una planta "ficticia" para equilibrar la oferta y la demanda, asignándole costos de producción

nulos para no afectar el análisis económico. Sin embargo, en el caso del producto 5 en la fábrica 3, se establece un costo M , indicando un valor extremadamente alto debido a la imposibilidad de fabricarlo en esa instalación.

Tabla 12

Matriz de transporte cuadrada

Productos		Productos					Oferta
Fábricas		1	2	3	4	5	
Fábricas	1	20 x_{11}	19 x_{12}	14 x_{13}	21 x_{14}	16 x_{15}	40
	2	15 x_{21}	20 x_{22}	13 x_{23}	19 x_{24}	16 x_{25}	60
	3	18 x_{31}	15 x_{32}	18 x_{33}	20 x_{34}	M x_{35}	90
	4	0 x_{41}	0 x_{42}	0 x_{43}	0 x_{44}	0 x_{45}	50
Demanda		30	40	70	40	60	240 240

Soluciones básicas factibles al problema del transporte

El método de solución factible se aplica directamente en la matriz, evitando el uso de ecuaciones del modelo simplex y permitiendo identificar todas las soluciones básicas factibles.

En un modelo con " m " fuentes y " n " destinos, se espera obtener $(m + n)$ ecuaciones y variables básicas, lo que permite una solución factible y no degenerada con $(m + n)$ variables positivas:

$$\sum_{i=1}^m o_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n d_{ij}$$

Solo existen $(m + n - 1)$ ecuaciones linealmente independientes, por lo que una solución básica factible no degenerada debe contar con la misma cantidad de variables positivas. Por el contrario, una solución degenerada presentaría menos de $(m + n - 1)$ variables positivas.

Para que una solución sea básica en la matriz de transporte, las variables x_{ij} deben ocupar posiciones independientes, evitando la formación de ciclos con movimientos perpendiculares entre al menos cuatro de ellas $4x_{ij}$.

Una solución factible y no degenerada requiere $(m + n - 1)$ variables básicas. No obstante, si se forma un ciclo entre algunas de ellas, como en el caso de X_{14} , X_{15} , X_{25} , X_{24} , la solución no puede considerarse básica.

Tabla 13

Matriz de asignación

Productos Fábricas		Productos					Oferta
		1	2	3	4	5	
Fábricas		1	2	3	4	5	
	1				20	20	40
	2				20	20	60
	3		20	70			90
	4	30	20				50
Demandas		30	40	70	40	60	

Para garantizar una solución básica factible y no degenerada, es necesario cumplir con los siguientes criterios:

1. $X_{ij} > 0$
2. Contar con exactamente $(m+n-1)$ variables positivas.
3. Asegurar que las variables básicas se ubiquen en posiciones independientes.

A lo largo del ejemplo, se observa que encontrar una solución básica, factible y no degenerada no es sencillo. Para ello, se pueden utilizar métodos como el simplex, la esquina noroeste, Vogel y la solución óptima.

Formulación Método simplex para la solución del problema del transporte

El tema del transporte es un caso particular dentro de los problemas de programación lineal y se puede solucionar utilizando el método del símplex, se pueden obtener significativos ahorros en los cálculos. Este procedimiento optimizado será denominado el método de símplex para transporte (Hillier & Lieberman, 2010).

Para lograrlo, se formula el método simplex y se resuelve utilizando la tabla correspondiente a este método.

1. Definimos las variables de decisión x_{ij} del problema.

En el caso del ejemplo analizado, se tiene lo siguiente:

La variable X_{ij} , definida para índices $i = 1, 2, 3$ (que representan las fábricas) y $j = 1, 2, 3, 4, 5$ (que denotan los productos), constituye una representación formal de la cantidad de unidades del producto j que se producen en la fábrica i .

El sustento argumentativo que fundamenta la inclusión de cada variable se detalla a continuación.

X_{11} : Cantidad de unidades del producto 1 producidas en la fábrica 1 (unidades), X_{12} : Cantidad de unidades del producto 2 producidas en la fábrica 1 (unidades), X_{13} : Cantidad de unidades del producto 3 producidas en la fábrica 1 (unidades), X_{14} : Cantidad de unidades del producto 4 producidas en la fábrica 1 (unidades), X_{15} : Cantidad de unidades del producto 5 producidas en la fábrica 1 (unidades).

X_{21} : Cantidad de unidades del producto 1 producidas en la fábrica 2 (unidades), X_{22} : Cantidad de unidades del producto 2 producidas en la fábrica 2 (unidades), X_{23} : Cantidad de unidades del producto 3 producidas en la fábrica 2 (unidades), X_{24} : Cantidad de unidades del producto 4 producidas en la fábrica 2 (unidades), X_{25} : Cantidad de unidades del producto 5 producidas en la fábrica 2 (unidades).

X_{31} : Cantidad de unidades del producto 1 producidas en la fábrica 3 (unidades), X_{32} : Cantidad de unidades del producto 2 producidas en la fábrica 3 (unidades), X_{33} : Cantidad de unidades del producto 3 producidas en la fábrica 3 (unidades), X_{34} : Cantidad de unidades del producto 4 producidas en la fábrica 3 (unidades), X_{35} : Cantidad de unidades del producto 5 producidas en la fábrica 3 (unidades).

2. Definir de la función objetivo

$$\begin{aligned} \text{Min } CV = & 20 \left(\frac{\$}{u}\right) x_{11}(u) + 19 \left(\frac{\$}{u}\right) x_{12}(u) + 14 \left(\frac{\$}{u}\right) x_{13}(u) + 21 \left(\frac{\$}{u}\right) x_{14}(u) + \\ & 16 \left(\frac{\$}{u}\right) x_{15}(u) + 15 \left(\frac{\$}{u}\right) x_{21}(u) + 20 \left(\frac{\$}{u}\right) x_{22}(u) + 13 \left(\frac{\$}{u}\right) x_{23}(u) + 19 \left(\frac{\$}{u}\right) x_{24}(u) + \\ & 16 \left(\frac{\$}{u}\right) x_{25}(u) + 18 \left(\frac{\$}{u}\right) x_{31}(u) + 15 \left(\frac{\$}{u}\right) x_{32}(u) + 18 \left(\frac{\$}{u}\right) x_{33}(u) + 20 \left(\frac{\$}{u}\right) x_{34}(u) + \\ & M \left(\frac{\$}{u}\right) x_{35}(u) \end{aligned}$$

3. Definir las restricciones

Existen dos categorías de restricciones: aquellas relacionadas con la oferta y aquellas derivadas de la demanda.

Oferta

$$X_{11}(u) + X_{12}(u) + X_{13}(u) + X_{14}(u) + X_{15}(u) \leq 40(u)$$

$$X_{21}(u) + X_{22}(u) + X_{23}(u) + X_{24}(u) + X_{25}(u) \leq 60(u)$$

$$X_{31}(u) + X_{32}(u) + X_{33}(u) + X_{34}(u) + X_{35}(u) \leq 90(u)$$

Demanda

$$X_{11}(u) + X_{21}(u) + X_{31}(u) \geq 30(u)$$

$$X_{12}(u) + X_{22}(u) + X_{32}(u) \geq 40(u)$$

$$X_{13}(u) + X_{23}(u) + X_{33}(u) \geq 70(u)$$

$$X_{14}(u) + X_{24}(u) + X_{34}(u) \geq 40(u)$$

$$X_{15}(u) + X_{25}(u) + X_{35}(u) \geq 60(u)$$

4. Definir la condición de no negatividad

$$X_{ij} \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, 3 \text{ y } j = 1, 2, 3, 4, 5$$

5. Definir modelo matemático

$$\begin{aligned} \text{Min } CV = & 20X_{11} + 19X_{12} + 14X_{13} + 21X_{14} + 16X_{15} + 15X_{21} + 20X_{22} \\ & + 13X_{23} + 19X_{24} + 16X_{25} + 18X_{31} + 15X_{32} + 18X_{33} + 20X_{34} + MX_{35} \end{aligned}$$

C.S.R.

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} \leq 40$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} \leq 60$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} \leq 90$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} \geq 30$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} \geq 40$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} \geq 70$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} \geq 40$$

$$X_{15} + X_{25} + X_{35} \geq 60$$

$$X_{ij} \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, 3 \text{ y } j = 1, 2, 3, 4, 5$$

6.2. Método de la esquina noroeste

El enfoque de la esquina noroeste es un algoritmo heurístico diseñado para abordar desafíos relacionados con el transporte o la distribución, al obtener una solución básica inicial que cumpla con todas las restricciones presentes, aunque esto no garantice que se logre el costo total óptimo. (Flores, 2013)

El enfoque comienza en un formato de matriz, lo que significa que las filas indican orígenes y las columnas indican destinos. El algoritmo arranca desde la celda, camino o esquinazo Noroeste de la tabla (esquina superior izquierda). (Estadística aplicada, 2011)

Para implementar el modelo, es necesario seguir el procedimiento indicado a continuación:

1. Crear una tabla con costos y necesidades de cada elemento.
2. Utilizar la tabla para resolver el problema generado por asignaciones previas.
3. Calcular la diferencia entre el valor más bajo y el segundo más bajo en cada fila y columna.
4. Identificar la fila o columna con la mayor diferencia, eligiendo en caso de empate.
5. Asignar la mayor cantidad posible a la celda con el costo más bajo.
6. Asignar cero a las celdas de la fila o columna donde la demanda u oferta se haya agotado.
7. Realizar la única asignación posible en cualquier fila o columna con una celda sin asignar.

8. Marcar las filas y columnas asignadas y repetir el proceso hasta que todas estén tachadas. Si quedan filas o columnas sin asignar, regresar al paso 2.

Ejemplo

- Paso 1**

Tabla 14

Matriz de asignación

P F		Productos					Oferta	
Fábricas		1	2	3	4	5		Dif
	1	20	19	14	21	16	40	2
	2	15	20	13	19	16	60	2
	3	18	15	18	20	M	90	3
	4	0	0	0	0	0	50	0
Demanda		30	40	70	40	60	240	
Dif.		15	15	13	19	16	240	

Dado que la columna 4 presenta la mayor diferencia (19), se procede a realizar la asignación en la celda con el menor costo $C_{44} = 0$; En este caso, el suministro disponible es de 50 unidades, mientras que la demanda correspondiente es de 40 unidades. Por lo tanto, se asignan 40 unidades a x_{44} .

Tabla 15

Matriz de asignación

P F		Productos					Oferta	
Fábricas		1	2	3	4	5		Dif
	1	20	19	14	0	16	40	2
	2	15	20	13	0	16	60	2
	3	18	15	18	0	M	90	3
	4	0	0	0	0 40	0	10	0
Demanda		30	40	70	0	60	200	
Dif.		15	15	13	19	16	200	

Dado que la demanda ha sido completamente satisfecha, las demás variables en la columna correspondiente (x_{14} , x_{24} , x_{34}) reciben una asignación de valor cero. Posteriormente, la columna 4 es eliminada del análisis, y la disponibilidad en la fila 4 se reduce en 40 unidades, dado que esta cantidad ha sido recientemente asignada.

- **Paso 2**

Se genera una nueva matriz y se procede a repetir el procedimiento previamente ejecutado.

Tabla 16

Nueva matriz

P. F.	Productos						Oferta	
Fabricas		1	2	3		5		Dif
	1	20	19	14		16	40	2
	2	15	20	13		16	60	2
	3	18	15	18		M	90	3
	4	0	0	0		0		0
Demanda		30	40	70		50	190	
Dif.		15	15	13		16	190	

Tras seleccionar el menor costo, $C_{45}=0$ se procede a asignar la máxima cantidad posible, que en este caso es 10 unidades a x_{45} . Como resultado, la oferta se agota por completo, lo que implica que las demás variables en la misma fila (x_{41} , x_{42} , x_{43} , x_{45}) reciben una asignación de cero. Finalmente, dado que la oferta de la fila 4 ha sido completamente utilizada, esta es eliminada del análisis.

- **Paso 3**

Se genera una nueva matriz y se repite el procedimiento previamente ejecutado.

Tabla 17

Nueva matriz

P. F.	Productos						Oferta	
Fabricas		1	2	3		5		Dif
	1	20	19	14		16	40	2
	2	15	20	13		16	60	2
	3	18	15	18		M	90	3
Demanda		30	40	70		50	190	
Dif.		3	4	1		0'	190	

Tras identificar el menor costo, $C_{32} = 15$, se asigna la cantidad máxima posible, que en este caso es 40. En consecuencia, se otorgan 40 unidades a X_{32} . Esta asignación agota por completo la demanda, lo que implica que las demás variables en la misma columna (x_{12} , x_{22} , x_{32}) reciben un valor de cero. Finalmente, debido a que la demanda de la columna 2 ha sido completamente satisfecha, esta se elimina del análisis.

Tabla 18

Nueva matriz

P. F.	Productos						Oferta	
Fabricas		1	2	3		5		Dif
	1	20	0	14		16	40	2
	2	15	0	13		16	60	2
	3	18	0	18		M	50	3
Demanda		30	0	70		50	150	
Dif.		3	4	1		0'	150	

- Paso 4

Se genera una matriz actualizada y se procede a repetir el procedimiento previamente aplicado.

Tabla 19

Nueva matriz

P F.	Productos						Oferta	
Fábricas		1	2	3		5		Dif
	1	20	0	14		16	40	2
	2	15	0	13		16	60	2
	3	18	0	18		M	50	3
Demanda		30	0	70		50	150	
Dif.		3		1		0'	150	

Se identifica el costo mínimo $c_{21} = 15$ y se asigna la cantidad máxima posible, es decir, 30 unidades a x_{21} . Esta asignación satisface completamente la demanda, por lo que los valores restantes en la misma columna (x_{11} , x_{21} , x_{31}) se establecen en cero y la columna 1 es eliminada al haber agotado su demanda por completo.

- Paso 5

Se presenta una nueva matriz

Tabla 20

Nueva matriz

P F.	Productos						Oferta	
Fábricas		1	2	3		5		Dif
	1	0	0	14		16	40	2
	2	0	0	13		16	30	2
	3	0	0	18		M	50	3
Demanda			0	70		50	120	
Dif.				1		0'	120	

Se identifica el costo mínimo $c_{33} = 18$; y se asigna la cantidad máxima posible, 50 a x_{33} . Esto satisface la demanda en esa columna, y los valores restantes (x_{31} , x_{32} , x_{33} , x_{35}) se asignan a cero. Como resultado, la fila 3 se elimina al agotarse la oferta disponible.

- Paso 6

Tabla 21

Nueva matriz

P. F.	Productos					Oferta	
Fábricas		1	2	3		5	Dif
	1	0	0	14		16	40
	2	0	0	13		16	30
	3	0	0				0
Demanda			0	20		50	70
Dif.				1		0	70

Se identifica el costo mínimo $c_{23} = 13$ y se asigna la cantidad máxima posible, es decir, 20 a x_{23} . Con esta asignación, la demanda en dicha columna se satisface completamente, lo que implica que los valores restantes en la misma (x_{13} , x_{33}) se establecen en cero. Como consecuencia, la columna 3 es eliminada al haberse agotado totalmente la demanda.

- Paso 7

Tras la obtención de una matriz transformada, se procede a la reiteración del procedimiento algorítmico previamente ejecutado.

Tabla 22

Nueva matriz

P. F.	Productos					Oferta	
Fábricas		1	2	3		5	Dif
	1	0	0	0		16	40
	2	0	0	0		16	10
	3	0	0				0
Demanda			0	0		50	50
Dif.				1		0	50

Se asignan 40 unidades x_{15} , y 10 a x_{25} al identificar los costos mínimos, agotando oferta y demanda, lo que elimina las filas 1 y 2. Se obtiene una solución factible, pero no óptima.

Tabla 23

Nueva matriz

P. F.	Productos						Oferta	
Fábricas		1	2	3		5		Dif
	1	0	0	0		0	0	
	2	0	0	0		0	0	
	3	0	0				0	
Demanda			0	0		0		0
Dif.				0		0		0

- Paso 8

Se obtiene una solución factible inicial, pero sin certeza de su óptima eficiencia.

Tabla 24

Nueva matriz

P F	Productos						Oferta
Fábricas		1	2	3	4	5	
	1					40	40
	2	30		20		10	60
	3		40	50			90
	4				40	10	50
Demanda		30	40	70	40	60	240 240

Se establecen el costo mínimo y los valores correspondientes de las variables:

$$X_{15} = 40 \quad X_{32} = 40$$

$$X_{21} = 30 \quad X_{33} = 50$$

$$X_{23} = 20 \quad X_{44} = 40$$

$$X_{25} = 10 \quad X_{45} = 10$$

$$CMT = 40 \cdot 16 + 30 \cdot 15 + 20 \cdot 13 + 10 \cdot 16 + 40 \cdot 15 + 50 \cdot 18 +$$

$$40 \cdot 0 + 10 \cdot 0 = \$ 3010$$

La solución, al no ser óptima, se optimiza mediante la aplicación del método de la esquina noroeste.

Capítulo VII

PRUEBA DE OPTIMALIDAD

CAPITULO VII: PRUEBA DE OPTIMALIDAD

7.1 Método de Solución Óptima

Una vez alcanzada una solución básica factible no-degenerada, se procede a mejorarla mediante el intercambio de variables básicas y no básicas, siguiendo un enfoque similar al Método Simplex. Para ello, se selecciona una nueva variable básica, priorizando aquella que reduzca con mayor rapidez los costos en la función objetivo.

1. Para este caso, es necesario seguir los siguientes procedimientos:
2. Marcar con un signo positivo (+) una celda vacía de manera que permita trazar un recorrido en forma de rectángulo.
3. Modificar estratégicamente los demás elementos para preservar las ecuaciones, identificando el recorrido y alternando la suma y resta de los valores asociados.
4. Evaluar si la nueva solución obtenida representa una mejora o un empeoramiento en comparación con la solución previa.
5. Probar el elemento ubicado en la posición (1,1), es decir, la variable x_{11} dentro del ejemplo analizado.

Tabla 25

Matriz de asignación

P. F.		Producto					Oferta
Fábrica		1	2	3	4	5	
	1	(+)				40 (-)	40
	2	30 (-)		20		10 (+)	60
	3		40	50			90
	4				40	10	50
Demanda		30	40	70	40	60	240 240

Impacto en la función objetivo: dado que los costos involucrados en este recorrido corresponden a los valores 20, 16, 16 y 15, respectivamente, la variación en el costo total se calcula como $+20 -16 +16 -15 = +5$, lo que implica un incremento en el costo global. Este resultado sugiere que la variable X_{11} no debe ser incorporada en la base.

Tomando como referencia el ejemplo previo, se procede a evaluar el elemento ubicado en la posición (3,1), es decir, la variable, X_{31} .

Tabla 26

Matriz de asignación

P. F.		Productos					Oferta
Fábricas		1	2	3	4	5	
	1					40	40
	2	30-		20+		10	60
	3	+	40	50-			90
	4				40	10	50
Demanda		30	40	70	40	60	240 240

Al evaluar los costos asociados a cada celda dentro de este ciclo, cuyos valores corresponden a 18, 15, 13 y 18, respectivamente, se obtiene una variación en el costo total equivalente a $+18 - 15 + 13 - 18 = -2$. Esto implica una reducción en el costo total.

Se confirma la viabilidad de incluir X_{31} en la base y se ajusta la asignación mediante la rotación del valor mínimo identificado en el ciclo.

La variable que sale de la base se identifica sumando y restando alternadamente los valores dentro de la estructura rectangular hasta que uno de ellos se anula. En este ejemplo, X_{21} se elimina cuando X_{31} aumenta a 30, generando una nueva tabla ajustada:

Tabla 27

Nueva tabla

P. F.		Productos					Oferta
Fábricas		1	2	3	4	5	
	1					40	40
	2			50		10	60
	3	30	40	20			90
	4				40	10	50
Demanda		30	40	70	40	60	240 240

El proceso de búsqueda de la vuelta cerrada para determinar las variables entrantes y salientes es complejo y puede ser lento, especialmente en problemas de gran escala. Para optimizar este procedimiento, se dispone de un método más sistemático que facilita la evaluación de la solución óptima y la selección de la variable que ingresará a la base.

Capítulo VIII

MODELOS DE TRANSPORTES – MÉTODO DE LOS COSTOS MÍNIMOS

CAPITULO VIII: MODELOS DE TRANSPORTES – MÉTODO DE LOS COSTOS MÍNIMOS

8.1. Costo mínimo

El método de los mínimos costos optimiza problemas de transporte al enfocarse en rutas con costos reducidos, ofreciendo mejores resultados que el método de la esquina noroeste.

Ejemplo

Tabla 28

Matriz de asignación de costos molino – silo

	MOLINO					
SILO		1	2	3	4	Oferta
	1	10	2	20	11	15
	2	7	9	20	12	25
	3	4	14	16	18	10
Demanda		5	15	15	15	

- Paso 1

En este procedimiento, el primer paso consiste en seleccionar el valor más bajo dentro de los costos disponibles.

Tabla 29

Primera asignación

	MOLINO					
SILO		1	2	3	4	Oferta
	1	10	15 2	20	11	15
	2	7	9	20	12	25
	3	4	14	16	18	10
Demanda		5	15	15	15	

Posteriormente, la cantidad asignada se deduce tanto de la disponibilidad en el "Silo 1" como de la demanda correspondiente al Molino 2. Sin embargo, en este escenario específico, la elección se realiza de manera arbitraria, ya que ambos valores son equivalentes.

Tabla 30

Segunda asignación

	MOLINO					
SILO		1	2	3	4	Oferta
	1		15			0
	2	7		20	12	25
	3	4		16	18	10
Demanda		5		15	15	

Se elimina el Silo 1 tras agotar su oferta y se selecciona el siguiente costo mínimo, ubicado en el Silo 3.

Tabla 31

Tercera asignación

	MOLINO					
SILO		1	2	3	4	Oferta
	1		15			0
	2	7		20	12	25
	3	5	4	16	18	10
Demanda		5		15	15	

Se asigna un máximo de 5 unidades para evitar que la demanda del Silo 3 sea negativa, lo que lleva a su eliminación.

Tabla 32

Tercera asignación

	MOLINO					
SILO		1	2	3	4	Oferta
	1		15			0
	2			20	12	25
	3	5		16	18	10
Demanda				15	15	

Procedemos a realizar una iteración nueva.

Tabla 33

Cuarta asignación

	MOLINO					
SILO		1	2	3	4	Oferta
	1		15			0
	2			20	15	25
	3	5		16		10
Demanda				15		

Y por ende sabemos que $x_{24}=10$ y $x_{33}=5$.

Tabla 34

Quinta asignación

	MOLINO					
SILO		1	2	3	4	Oferta
	1		15			0
	2			20	15	10
	3	5		16		5
Demanda				15		

Como resultado, se obtiene la solución inicial factible básica:

$$Z = 10 x_{11} + 2 x_{12} + 20 x_{13} + 11 x_{14} + 7 x_{21} + 9 x_{22} + 20 x_{23} + 12 x_{24} + 4 x_{31} + 14 x_{32} + 16 x_{33} + 18 x_{34}$$

Que reporta un costo (valor en la función objetivo) de:

$$Z = 10(0) + 2(15) + 20(0) + 11(0) + 7(0) + 9(0) + 20(20) + 12(15) + 4(5) + 14(0) + 16(0) + 18(0) = 630$$

Los costos asociados a la distribución son:

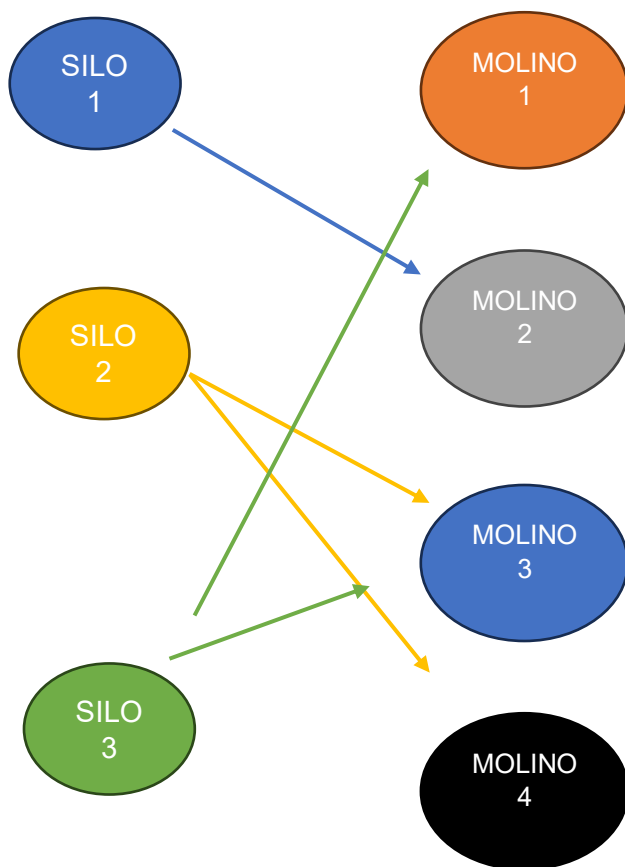
Tabla 35

Cuadro de asignaciones

	MOLINO					Oferta
		1	2	3	4	
SILO	1		15		0	15
	2			10	15	25
	3	5		5		10
Demanda		5	15	15	15	

Figura 10

Distribución Silo – Molino



En esta situación, el método del costo mínimo arroja un costo total mayor en comparación con los obtenidos a través de la Programación Lineal y el propio Método de Costos Mínimos. No obstante, esta no es la norma general, ya que dicho método es de fácil aplicación y, en términos de eficiencia, ofrece mejores resultados en contraste con el Método de la Esquina Noroeste.

Capítulo IX

MODELOS DE TRANSPORTES – MÉTODO DE LAS GANANCIAS MÁXIMAS

CAPITULO IX: MODELOS DE TRANSPORTES – MÉTODO DE LAS GANANCIAS MÁXIMAS

9.1. Caso Práctico

Se puede caracterizar el modelo de transporte como una estrategia diseñada para establecer un esquema de distribución de bienes en términos generales desde las diversas fuentes hasta los variados destinos en el mercado demandante (González Ariza, 2015).

Una característica de las cadenas de suministros el movimiento del producto desde los varios orígenes hacia un conjunto de diferentes destinos demandantes con el menor costo posible (Nápoles, 2007)

Después de completar el programa de capacitación de la cadena hotelera, un grupo de nuevos administradores de moteles debe manifestar sus preferencias respecto a tres regiones del país. Sus respuestas se agrupan en tres categorías, según la utilidad o preferencia asignada en una escala del 1 al 10. De los 28 administradores, 4 pertenecen al grupo 1, 8 al grupo 2 y 16 al grupo 3.

La empresa dispone de un total de 32 vacantes distribuidas de la siguiente manera: 4 posiciones para administradores en la región norte, 10 en el sur y 18 en el oeste. Con el objetivo de optimizar la utilidad total derivada de la asignación de estos administradores, se propone abordar la resolución de este problema mediante la aplicación del método de transporte.

Los valores numéricos representan el nivel de utilidad o preferencia asignado a cada región en una escala del 1 al 10, según la percepción de cada grupo. Del total de 28 administradores, la distribución quedó establecida de la siguiente manera: 4 pertenecen al grupo 1, 8 al grupo 2 y 16 al grupo 3.

La empresa debe asignar administradores en el norte, sur y oeste, optimizando la utilidad total mediante el método de transporte.

Tabla 36

Matriz original

	N	S	O	
G1	3	10	8	4
G2	5	8	5	8
G3	7	4	7	16
GFICTICIO	0	0	0	0
	4	10	18	32

Solución

Para optimizar, es necesario transformar la matriz original. Esto se logra identificando el valor más alto entre los "costos" y restando dicho valor a los demás elementos, generando así una nueva matriz. Sobre esta matriz modificada, se aplica el método del transporte siguiendo el procedimiento utilizado en problemas de minimización.

Tabla 37

Matriz modificada

	N	S	O	
G1	7 X	0 4	2 X	4X=0
G2	5 X	2 6	5 2	8=2=0
G3	3 4	6 X	3 12	16=12=0
GFICTICIO	0 X	0 X	0 4	4=0
	4=0	10=6=0	18=6=4=0	32

Proceder con la evaluación de la optimalidad.

Tabla 38

Matriz aplicando prueba de optimalidad

	N 3	S 0	O 3	
G1 0	7	0 4	2 *	4
G2 2	5	2 6	5 2	8
G3 0	3 4	6	3 12	16
GFICTICIO -3	0	0	0 4	4
	4	10	18	32

Tras determinar el valor de todos los costos marginales (CMG), se identifica que en la celda G1-o el CMG es igual a -1. En consecuencia, la solución inicial aún no alcanza la optimalidad, por lo que es necesario realizar un ajuste y reevaluar el procedimiento.

Implementando el enfoque metodológico de la “piedra que rueda”.

Tabla 39

Aplicación del método de la piedra que rueda

	N 3	S 0	O 3	
G1 0	7	0 - 4	2 +	4
G2 2	5	2 + 6	5 - 2	8
G3 0	3 4	6	3 12	16
GFICTICIO -3	0	0	0 4	4
	4	10	18	32

Tabla 40

Segunda solución

	N	S	O	
G1	7	0 2	2 2	4
G2	5	2 8	5	8
G3	3 4	6	3 12	16
GFICTICIO	0	0	0 4	4
	4	10	18	32

Una vez determinada la solución óptima, esta debe ser reinterpretada y ajustada a la matriz inicial.

Tabla 41

Traslado a la matriz original

	N	S	O	CAPACIDAD
G1	3	10 2	8 2	4
G2	5	8 8	5	8
G3	7 4	4	7 12	16
DEMANDA	4	10	18	32

Respuesta:

Enviar:

2 administradores del G1 al sur = 20 puntos

2 administradores del G1 al oeste = 16

8 administradores del G2 al sur = 64

4 administradores del G₃ al norte = 28

12 administradores del G₃ al oeste = 84

Puntos totales máximos de preferencia = 212

Capítulo X

MODELOS DE TRANSPORTES – MÉTODO APROXIMADO DE VOGEL

CAPITULO X: MODELOS DE TRANSPORTES – MÉTODO APROXIMADO DE VOGEL

10. 1 Método aproximado de Vogel

Este enfoque metodológico representa una estrategia eficiente para determinar una solución inicial básica factible, la cual puede constituir directamente la solución óptima o, en su defecto, requerir un número mínimo de iteraciones adicionales para alcanzar dicho estado.

El enfoque de Vogel toma en cuenta los costos por unidad de manera efectiva, ya que la diferencia indica el costo extra mínimo que se genera al no realizar una asignación en la celda con el costo más bajo en una fila o columna específica (Lieberman, 2018).

El procedimiento se desarrolla conforme a los siguientes pasos:

1. Se inicia considerando las celdas que aún no han sido asignadas.
2. Se calcula, dentro de cada fila y columna, la diferencia entre los dos costos más bajos de las celdas correspondientes.
3. Se identifica la fila o columna con la mayor diferencia obtenida en el paso anterior.
4. Se asigna la mayor cantidad posible a la celda que, dentro de la fila o columna seleccionada, posea el menor costo. La asignación máxima viable estará determinada por el menor valor entre la disponibilidad del recurso y la cantidad requerida.
5. Se actualizan los valores restando la cantidad asignada tanto de la disponibilidad como de la demanda correspondiente. Si una fila o columna se reduce a cero, se elimina del análisis.

Tabla 42

Matriz de asignación

PLANTA	MERCADO				CAPACIDAD	Dif1
	1	2	3	4		
A	9	6	4	7	35	2
B	2	4	6	3	20	1
C	8	1	8	6	45	5
Requerimientos	30	40	10	20		

Dashed arrows indicate the selection process:
 - From Row B, a dashed arrow points to Column 1 (cost 2).
 - From Column 1, a dashed arrow points to Row B (cost 2).
 - A solid arrow points from the intersection of Row B and Column 1 to the value 0, indicating the assignment of 20 units.
 - Below the table, the updated requirements are shown: 10 for Column 1, 3 for Column 2, 2 for Column 3, and 3 for Column 4.
 - The updated differences (Dif1) are shown below the requirements: 6 for Column 1, 3 for Column 2, 2 for Column 3, and 3 for Column 4.

El mayor valor entre las diferencias calculadas es 6 en la primera columna. Se asignan 20 unidades a la celda B1 por tener el menor costo (2). Luego, se recalculan las diferencias tras eliminar la fila B al agotarse sus unidades.

Tabla 43

Nueva matriz de asignación

PLANTA	MERCADO				CAPACIDAD		Dif1
	1	2	3	4			
A	9	6	4	7	35		2
B	2	4	6	3	20	→ 0	→ 1
C	8	1	8	6	45	→ 5	→ 5
Requerimientos	30	40	10	20			

	↓	↓		
	10	0		

Dif1	6	3	2	3
Dif2	1	<u>5</u>	4	1

La diferencia más significativa se localiza en la segunda columna, con un valor de 5. En consecuencia, se asignan 40 unidades a la celda C2, dado que presenta el menor costo dentro de dicha columna, equivalente a 1. Posteriormente, se recalculan las diferencias restantes, considerando que la columna 2 ha sido excluida del análisis tras haber recibido la totalidad de las unidades requeridas.

Tabla 44

Nueva matriz de asignación

PLANTA	MERCADO				CAPACIDAD		Dif1	Dif2
	1	2	3	4				
A	9	6	4	7	35	→ 25	2	3
B	2	4	6	3	20	→ 0	1	
C	8	1	8	6	45	→ 5	5	2
Requerimientos	30	40	10	20				

	↓	↓	↓	
	10	0	0	

Dif1	6	3	2	3
Dif2	1	5	<u>4</u>	1

La diferencia de mayor magnitud se encuentra en la tercera columna, alcanzando un valor de 4. En consecuencia, se asignan 10 unidades a la celda A₃, dado que en dicha columna presenta el costo más reducido, correspondiente a 4.

Tras haber recibido la totalidad de las unidades requeridas, la columna 3 es eliminada del análisis. A continuación, se procede al cálculo de las diferencias subsiguientes.

Tabla 45

Nueva matriz de asignación

PLANTA	MERCADO				CAPACIDAD				
	1	2	3	4		Dif1	Dif2	Dif3	
A	9	6	4	7	35	25 → 5	2	3	2
B	2	4	6	3	20	0 → 1	1		
C	8	1	8	6	45	5	5	2	2
Requerimientos	30	40	10	20					
	↓	↓	↓	↓					
	10	0	0	0					
Dif1	6	3	2	3					
Dif2	1	5	<u>4</u>	1					

La diferencia de mayor magnitud se encuentra en la fila A, alcanzando un valor de 2. En consecuencia, se asignan 20 unidades a la celda A₄, dado que en la fila B esta celda presenta el costo más reducido, equivalente a 7. Posteriormente, se procede a calcular las diferencias subsiguientes, considerando que la columna 4 ha sido excluida del análisis tras haber recibido en su totalidad las unidades requeridas.

Se asignan 5 unidades de la planta A y 5 de la planta C al mercado 1, que aún presenta un déficit de 10 unidades, completando así la solución inicial factible, como se aprecia:

$$X_{A1} = 5, X_{AB} = 10, X_{A4} = 20, X_{B1} = 20, X_{C1} = 5, X_{C2} = 40$$

Con un costo de transporte igual a:

$$CT = 5 \cdot 9 + 4 \cdot 10 + 7 \cdot 20 + 2 \cdot 20 + 8 \cdot 5 + 1 \cdot 40$$

$$CT = \$345$$

Capítulo XI

MODELO DE ASIGNACIÓN

CAPITULO XI: MODELO DE ASIGNACIÓN

La asignación de recursos mediante este método constituye una aplicación de la Programación Lineal, permitiendo distribuir de manera eficiente tareas entre individuos. Se trata de un procedimiento iterativo que asegura la determinación de una asignación óptima sin necesidad de evaluar exhaustivamente todas las combinaciones posibles. Esta metodología ha sido empleada en la distribución de órdenes a máquinas, la asignación de personal a proyectos, la designación de vendedores a determinadas áreas comerciales y la asignación de vehículos a distintos sectores, entre otros usos.

El modelo de asignación se clasifica como un tipo específico de problema dentro de la programación lineal donde los elementos asignados son recursos que se utilizan para llevar a cabo ciertas tareas. Un ejemplo de estos elementos asignados son los empleados a quienes se les debe otorgar trabajo. (Framar, 2016)

El Método Húngaro asigna eficientemente personas a tareas en una matriz cuadrada, garantizando una correspondencia uno a uno. Si el número de personas y tareas no es igual, se agregan variables ficticias de holgura con valor cero, las cuales no influyen en la solución final.

En la matriz, los valores representan los costos asociados a cada asignación específica. Esta técnica busca minimizar estratégicamente los costos de oportunidad perdidos, de manera análoga a la minimización del máximo arrepentimiento en procesos de toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre.

La formulación matemática de este problema de asignación, dentro del enfoque de la Programación Lineal, se define a través de la siguiente función de optimización.:

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

Sujeto a:

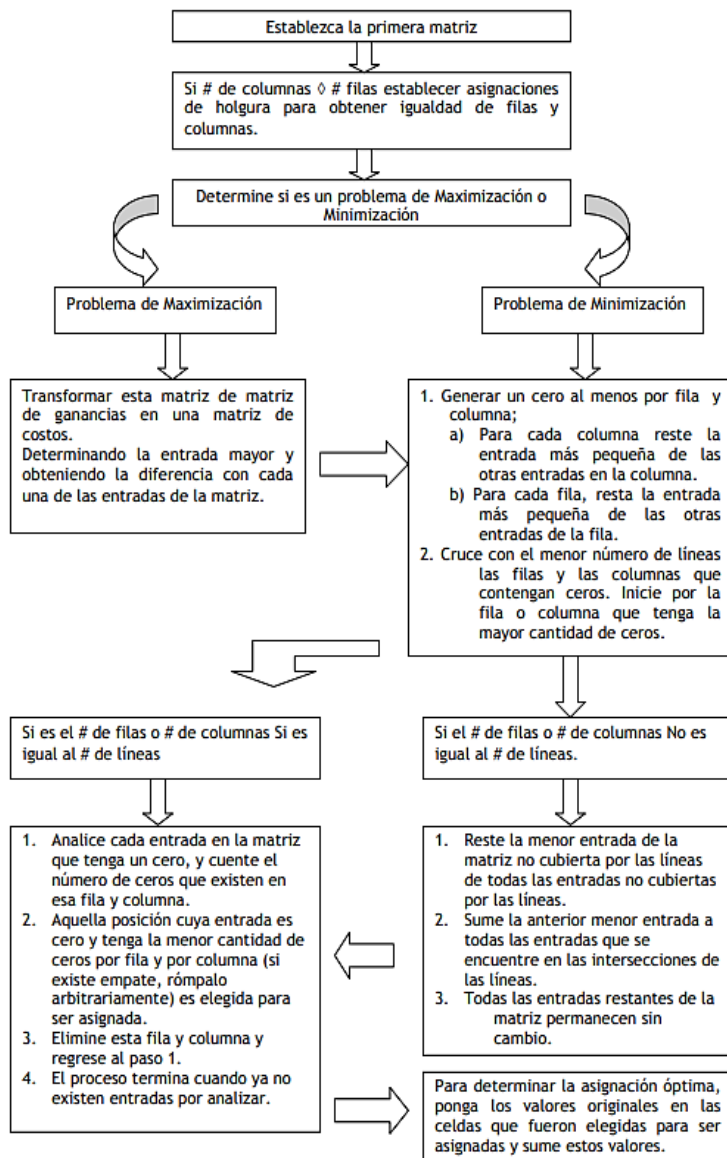
$$\sum_{i=1}^n C_{ij} = 1 ; \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ij} = 1 ; \text{para } j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Cualquier problema de asignación puede modelarse y resolverse mediante técnicas de Programación Lineal, empleando el método Simplex. No obstante, el enfoque específico del método de asignación resulta computacionalmente más eficiente, optimizando los cálculos y reduciendo la complejidad del proceso de solución.

Figura 11:

Algoritmo del método de asignación



Capítulo XII

MODELO DE ASIGNACIÓN - PROBLEMA

CAPÍTULO XII: MODELO DE ASIGNACIÓN – PROBLEMA

12.1. Caso práctico

Una empresa especializada en servicios de limpieza busca establecer la asignación óptima de su personal a distintos centros de trabajo, con el propósito de maximizar la eficiencia global en la ejecución de sus tareas. A continuación, se presenta la matriz que refleja el nivel de desempeño de cada empleado en caso de ser asignado a los diversos centros laborales.

Tabla 46

Matriz de asignación

EMPLEADO	CENTRO DE TRABAJO				
	1	2	3	4	5
1	20	14	6	10	22
2	16	8	22	20	10
3	8	6	24	40	12
4	4	16	22	6	24

Para equilibrar la matriz y optimizar la asignación, se añadirá un empleado artificial, dado que hay cuatro empleados y cinco centros de trabajo.

Tabla 47

Nueva matriz de asignación

EMPLEADO	CENTRO DE TRABAJO				
	1	2	3	4	5
1	20	14	6	10	22
2	16	8	22	20	10
3	8	6	24	40	12
4	20	22	2	8	6
5	0	0	0	0	0

Con el propósito de optimizar el desempeño global en los centros de trabajo, y dado que se trata de un problema de maximización, se transforma la matriz de ganancias en una matriz de costos. Para ello, se resta el valor máximo de las celdas, que en este caso es 40, de cada una de las entradas de la matriz. A continuación, se presenta la matriz resultante tras dicha modificación:

Tabla 48*Matriz de asignación modificada*

EMPLEADO	CENTRO DE TRABAJO				
	1	2	3	4	5
1	20	26	34	30	18
2	24	32	18	20	30
3	32	34	16	0	28
4	20	18	38	32	34
5	40	40	40	40	40

Para determinar los costos de oportunidad por columna, se resta el menor valor de costo en cada columna a los demás valores dentro de la misma. A continuación, se presenta la matriz resultante tras este ajuste:

Tabla 49*Nueva matriz de asignación*

EMPLEADO	CENTRO DE TRABAJO				
	1	2	3	4	5
1	0	8	18	30	0
2	2	12	0	18	10
3	12	16	0	0	10
4	0	0	22	32	16
5	0	2	4	20	2

Dado que las cinco filas permiten abarcar todas las celdas con valores cero utilizando el menor número de líneas posible, se concluye que se ha alcanzado una asignación óptima.

En la fase final, se identifican las filas y columnas con un único valor igual a cero para definir las asignaciones. Se observa que las filas 2 y 5, así como las columnas 2, 4 y 5, cumplen esta condición. Como resultado, la persona 2 se asigna al centro de trabajo 3, la persona 5 (ficticia) al centro 1 (indicando que no será ocupado por un empleado real), la persona 4 al centro 2, la persona 3 al centro 4 y la persona 1 al centro 5.

La distribución óptima de los recursos se establece de la siguiente manera:

Tabla 50

Asignación óptima

Persona	Centro de Trabajo	Eficiencia
1	5	22
2	3	22
3	4	40
4	2	22
		106

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ackoff, Sasiani. (1979). Fundamentos de investigación de operaciones. México: Limusa, México.
- Anderson, D. Sweeney, D., & Williams, T. (2004). Métodos cuantitativos para los negocios. México: Editorial Thomson.
- Gutiérrez Carmona, J. (2008). Modelos Financieros con Excel. Bogotá: ECOE.
- Hiller, F., Hiller, M., & Liberman, G. (2002). Métodos Cuantitativos para Administración. México: Editorial Prince
- Hill, Kamlesh, M., & Solow, D. (1996). Investigación Operaciones. México: MacGraw Hill.
- Moskowitz, H, & Wright (1982). Investigación Operacional. México: Prince Hall.
- Prawda, J. (1979). Métodos y modelos de investigación de operaciones. Volumen I: modelos determinísticos. México: Limusa
- Team System, (2025). Modelo económico. <https://www.sdelsol.com/glosario/modelo-economico/#:~:text=Los%20modelos%20econ%C3%B3micos%20son%20una,el%20desarrollo%20de%20las%20econom%C3%ADas>.
- Posso, (2014), CONCEPTOS Y PRINCIPIOS DE ECONOMÍA Y METODOLOGÍAS UTILIZADAS EN LA INVESTIGACIÓN ECONÓMICA. Universidad de Nariño. Colombia. [file:///C:/Users/Phillipe/Downloads/Dialnet-ConceptosYPrincipiosDeEconomiaYMetodologiasUtiliza-4820645%20\(1\).pdf](file:///C:/Users/Phillipe/Downloads/Dialnet-ConceptosYPrincipiosDeEconomiaYMetodologiasUtiliza-4820645%20(1).pdf)
- Taha (2012). Investigación de operaciones. Novena edición. México. <https://fad.unsa.edu.pe/bancayseguros/wp-content/uploads/sites/4/2019/03/investigacic3b3n-de-operaciones-gna-edicic3b3n-hamdy-a-taha-fl.pdf>
- Moreno (2021), Modelos determinísticos. Investigación de operaciones. <https://www.studocu.com/es-mx/document/instituto-tecnologico-de-nuevo-leon/investigaciones-de-operaciones/56-modelos-deterministicos/58557600>

Euroinnova, (2021), ¿qué es programación lineal en investigación de operaciones?
<https://www.euroinnova.com/blog/que-es-programacion-lineal-en-investigacion-de-operaciones>

Questionpro, (2022), Programación lineal: Qué es, usos y pasos para realizarla.
<https://www.questionpro.com/blog/es/programacion-lineal/>

Muñoz, (2012), Programación Lineal. UPCT. España.
https://ocw.bib.upct.es/pluginfile.php/10251/mod_resource/content/1/T7.pdf

Framar (2016), Modelo de asignación. Universidad Mariano Gálvez. Guatemala.
<https://proyectoinvestigacionoperaciones.wordpress.com/2016/11/09/primera-entrada-del-blog/>

Lieberman, G. J. (2018). Introducción a la Investigación de Operaciones. México: Mc Graw Hill.
https://dudasytareas.wordpress.com/wp-content/uploads/2017/05/hillier_lieberman.pdf

González Ariza, (2015), Manual práctico de investigación de operaciones. Barranquilla: Universidad del norte. https://api.pageplace.de/preview/DTo400.9789587416459_A26200876/preview-9789587416459_A26200876.pdf

Nápoles Peña, O. (2007). Folleto de Investigación de Operaciones I. La Habana: Universitaria.
https://discovery.biblioteca.uoc.edu/discovery/fulldisplay?docid=alma991000894998906712&vid=34CSUC_UOC:VU1&lang=ca&offset=0&context=U

Hillier & Lieberman, (2010), INTRODUCCIÓN A LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES Novena edición. México. https://dudasytareas.wordpress.com/wp-content/uploads/2017/05/hillier_lieberman.pdf

Flores, (2013), Ejercicios sobre el Método de la esquina noroeste y costo mínimo. Authorea.
<https://www.authorea.com/users/225304/articles/292761-ejercicios-sobre-el-m%C3%A9todo-de-la-esquina-noroeste-y-costo-m%C3%ADnimo>

Portal estadística aplicada, (2011), Método Esquina Noroeste - Método Húngaro.
<https://www.estadistica.net/INSTRUMENTOS/2-Noroeste-Hungaro.pdf>

MODELOS DE **OPTIMIZACIÓN AVANZADA**

Dr. Héctor William Carlos Cruces

Universidad Nacional San Luis

Gonzaga de Ica

rlvargasv@ucvvirtual.edu.pe

<https://orcid.org/0000-0002-7570-2467>

Mg. Jessica Marilu Loera Paredes

Empresa Privada Mecafer EIRL

diocdental@hotmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-1757-6746>

Mg. Jorge Luis Donayre Ríos

Universidad Nacional San Luis

Gonzaga de Ica

mmespejovargas@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-1491-9099>

Dr. Enrique Mendoza Caballero

Universidad Nacional San Luis

Gonzaga de Ica

enrique.mendoza@unica.edu.pe

<https://orcid.org/0000-0003-0606-821x>